Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кемеровский государственный университет»
Кафедра дифференциальных уравнений

УТВЕРЖДАЮ
Декан математического факультета
Данилов Н.Н.

____

10 февраля 2014 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
по дисциплине ОПД.Ф1 «**Дифференциальные уравнения**»

для специальности 010501.65 «Прикладная математика и информатика»

факультет Математический

курс __2______________________
семестр__3,4_________________
лекции__70__________________(часов)
практические занятия_____70__(часов)
лабораторные занятия______(часов)
самостоятельные занятия__64_(часов)
Всего часов__204___
экзамен__3,4_семестр
зачет____3___семестр

Составители:
д.ф.-м.н., профессор кафедры Кучер Н.А.
доцент кафедры Прокудин Д.А.
старший преподаватель кафедры Краюшкина М.В.

Кемерово 2014

Рабочая программа дисциплины «Дифференциальные уравнения» федерального компонента цикла ОПД.Ф.1 составлена в соответствии с Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования второго поколения по специальности 010501.65 «Прикладная математика и информатика»

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры дифференциальных уравнений

Протокол № 6 от «7» февраля 2014 г.

Зав. кафедрой ____________________/Кучер Н.А./

Одобрено методической комиссией
Протокол № 6 от «10» февраля 2014 г.

Председатель________________ / Фомина Л. Н. /

Организационно-методический раздел

1. Пояснительная записка

Актуальность и значимость учебной дисциплины

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» обеспечивает подготовку слушателей по одной из фундаментальных математических дисциплин, являющейся мощным орудием исследования многих задач естествознания и техники. Содержание дисциплины имеет многочисленные приложения и является одним из фундаментов будущей практической и научной деятельности специалиста. Дифференциальные уравнения являются одним из основных математических понятий, наиболее широко применяемых при решении практических задач. Причина этого состоит в том, что при исследовании физических процессов, решении различных прикладных задач, как правило, не удается непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие исследуемые явления. Обычно легче устанавливаются зависимости между теми же величинами и их производными или дифференциалами. Соотношения такого рода и называются дифференциальными уравнениями.

При подготовке студента-математика курс «Дифференциальные уравнения» относится к общеобразовательным курсам и составляет важную и неотъемлемую часть его профессионального становления.

Соответствие рабочей программы Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования

При составлении данной программы авторы руководствовались Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности 010501.65 «Прикладная математика и информатика».

Цель и задачи учебной дисциплины

Целью преподавания дисциплины «Дифференциальные уравнения» является формирование у будущих специалистов современных теоретических знаний в области обыкновенных дифференциальных уравнений и практических навыков в решении и исследовании основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений, ознакомление студентов с начальными навыками математического моделирования.

Задачи изучения дисциплины:

- Овладение навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями;
- Выработка умения классифицировать уравнения;
- Выработка умения ставить и исследовать задачу Коши;
- Овладение навыками интегрирования простейших дифференциальных уравнений первого порядка;
- Выработка умения строить решение линейных уравнений и систем;
- Формирование представлений о методах приближенного решения задач с помощью дифференциальных уравнений.

Место дисциплины в профессиональной подготовке специалиста

Дисциплина относится к числу прикладных математических дисциплин и связана с приложениями методов дифференциальных уравнений к ряду важных разделов. Изучение данной дисциплины базируется на знаниях студентами общих курсов линейной алгебры, математического анализа, элементами теории функционального анализа. «Дифференциальные уравнения» дают прикладнику одно из мощных средств для анализа явлений и процессов различной природы математическими методами.

Структура учебной дисциплины

Программа курса «Дифференциальные уравнения» состоит из следующих основных разделов:

- Общая теория дифференциальных уравнений и систем;
- Задача Коши и краевые задачи;
- Линейные уравнения и системы;
- Теория устойчивости;
- Уравнения с частными производными первого порядка.

Особенности изучения дисциплины

Курс «Дифференциальные уравнения» построен с позиции моделирования физических задач. При изучении данной дисциплины необходимым является владение методами математического анализа.

Формы организации учебного процесса по данной дисциплине

На основе программы и учебного плана в ходе проведения занятий используются различные формы: лекции, практические занятия, лабораторные занятия, самостоятельная работа, контрольные работы, семестровые задания, коллоквиумы, зачет, экзамен.

Взаимосвязь аудиторной и самостоятельной работы

Аудиторные занятия, лекции и лабораторные и практические занятия предполагают самостоятельную работу студентов по данному курсу. На лекциях предлагаются для самостоятельного доказательства некоторые следствия теорем. На лабораторных и практические занятиях даются домашние задания для самостоятельного решения задач и упражнений по дифференциальным уравнениям. Каждому студенту выдаются индивидуальные семестровые задания, для выполнения которых требуется самостоятельная работа.

Требования к уровню освоения содержания дисциплины

После изучения дисциплины «Дифференциальные уравнения» студент должен *знать*:

- основные понятия и определения;

- основные теоремы существования и единственности решения;

- теоремы о свойствах решений линейных дифференциальных уравнений и систем;

- теоремы о представлении решений дифференциальных уравнений и систем с постоянными коэффициентами;

- утверждения об устойчивости решений и поведении траекторий вблизи положений равновесия;

- краевые задачи и свойства их решений;

- уравнения в частных производных первого порядка и способы представления решений.

Студент должен *уметь*:

- решать основные типы дифференциальных уравнений первого порядка;
- ставить и решать задачу Коши;
- решать линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами;
- решать линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами;
- решать краевые задачи;
- исследовать устойчивость решений;
- строить траектории на фазовой плоскости;
- решать уравнения в частных производных первого порядка.

Объем и сроки изучения дисциплины

По данному курсу в течение двух семестров проводятся лекционные, практические занятия. Для студентов дневной формы обучения на лекционный курс отводится 70 часов, на практические занятия – 70 часов, на самостоятельную работу – 64 часа

Виды контроля знаний и их отчетности

В конце каждого семестра для студентов дневного отделения по курсу дифференциальных уравнений проводится экзамен, по практическим занятиям в конце первого семестра – зачет. В течение семестра проводятся контрольные работы по практическим и лабораторным занятиям, а по теоретическому курсу проводятся коллоквиумы, тестирование. Каждый семестр студентам выдаются индивидуальные семестровые задания, для выполнения которых требуются элементы исследовательской работы.

Критерии оценки знаний студентов

Для получения зачета по курсу дифференциальных уравнений требуется:

- посещение занятий;
- полное выполнение семестрового задания;
- выполнение домашних заданий;
- выполнение контрольных работ.

В случае невыполнения одного из указанных выше требований студент имеет возможность сдать зачет, выполнив правильно и в полном объеме более половины упражнений из индивидуального зачетного задания.

Для получения положительной оценки на экзамене по курсу дифференциальных уравнений требуется:

- получение зачета по лабораторным, или практическим занятиям;
- сдать коллоквиум;
- ответить не менее чем на 70% вопросов индивидуального тестового задания;
- ответить на экзаменационный билет.

В случае невыполнения пунктов 2 и 3, студенту на экзамене дается дополнительная задача.

Экзаменационный билет по дифференциальным уравнениям включает в себя 4 задания: два теоретических вопроса и две задачи. Каждый теоретический вопрос соответствует программе данного семестра. Задача дается средней сложности (сравнимая с теми, которые решались на практических занятиях).

Положительная отметка по экзамену выставляется, если студент правильно ответил более половины вопросов и решил одну из задач. Дополнительные вопросы задаются для уточнения знаний студента по вопросам билета, и, как правило, не выходят за пределы вопросов по билету.

2. Тематический план

№	Название и содержание разделов, тем, модулей	Объем часов					Формы контроля
		Общий	Аудиторная работа			Самостоятельная работа	
			Лекции	Практические (или семинарские)	Лабораторные		
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Общая теория дифференциальных уравнений и систем	40	12	20		8	Задание в семестровой работе
2	Задача Коши и краевые задачи	44	16	12		16	Задание в семестровой работе Контрольная работа Коллоквиум
3	Линейные уравнения и системы	49	18	18		13	Задание в семестровой работе Зачет Экзамен
4	Теория устойчивости	52	20	16		16	Задание в семестровой работе Коллоквиум
5	Уравнения с частными производными первого порядка	19	4	4		11	Контрольная работа Тест

							Экзамен
ИТОГО		**204**	70	70		64	

3. Содержание дисциплины

Общая теория дифференциальных уравнений и систем; задача Коши и краевые задачи; линейные уравнения и системы; теория устойчивости; уравнения в частных производных первого порядка.

Содержание частей, разделов и тем курса

Общая теория дифференциальных уравнений и систем

1. Понятие дифференциального уравнения второго и высших порядков, системы дифференциальных уравнений
2. Решение уравнения и систем дифференциальных уравнений
3. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения и его решения
4. Интегрирование уравнений вида $x' = f(x),\ x' = f(t)$. Уравнения с разделяющимися переменными
5. Однородные уравнения
6. Линейные уравнения. Свойства решений. Метод вариации произвольной постоянной. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати
7. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Задача Коши и краевые задачи

1. Сжатые отображения. Оператор Пикара
2. Задача Коши
3. Теорема единственности задачи Коши
4. Теорема существования решения задачи Коши
5. Продолжение решения задачи Коши. Непродолжаемые решения и их свойства
6. Теорема о поведении интегральной линии непродолжаемого решения
7. Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных данных. Постановка проблемы
8. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров. Лемма Адамара
9. Теорема о дифференцируемости решения задачи Коши по параметрам. Уравнения в вариациях. Сведение исследования зависимости решения от начальных данных к исследованию зависимости от параметров. Формулировки теорем о непрерывной зависимости и дифференцируемости решения по начальным данным
10. Формулировки основных теорем существования и единственности для нормальных систем дифференциальных уравнений
11. Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Функция Грина. Интегральное представление решения краевой задачи

Линейные уравнения и системы

1. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений линейного уравнения. Фундаментальная система решений (ФСР). Определитель Вронского. Теоремы о структуре общего решения линейного однородного и неоднородного уравнений

2. Построение ФСР линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Случай простых корней характеристического уравнения. Случай кратных корней характеристического уравнения

3. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

4. Свойства решений линейных систем. Векторное пространство решений линейных систем. Линейная зависимость и независимость решений линейных систем. Теорема о размерности пространства решений линейной однородной системы. ФСР. Фундаментальная матрица

5. Представление общего решения линейной однородной системы при помощи фундаментальной матрицы. Определитель Вронского. Формула Лиувилля

6. Теорема о структуре общего решения линейной неоднородной системы. Метод вариации произвольных постоянных. Определение и свойства матричной экспоненты

7. Построение фундаментальной матрицы. Случай наличия полной системы линейно независимых собственных векторов. Случай отсутствия полной системы линейно независимых собственных векторов

<u>Теория устойчивости</u>

1. Постановка задачи. Определение устойчивости по Ляпунову. Сведение исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения. Функция Ляпунова. Лемма Ляпунова

2. Теорема Четаева о неустойчивости. Исследование устойчивости нулевого решения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Лемма об оценке нормы решения

3. Теорема Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению

4. Автономные системы. Фазовое пространство. Свойства решений автономных систем. Типы траекторий автономных систем

5. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

6. Первые интегралы. Теорема существования независимых первых интегралов. Общий вид первого интеграла. Построение первого интеграла путем приведения системы к симметричной форме

<u>Уравнения с частными производными первого порядка</u>

1. Линейные уравнения с частными производными первого порядка

2. Постановка задачи Коши для линейных уравнений. Теорема единственности решения задачи Коши

Практические занятия, их наименования

<u>Общая теория дифференциальных уравнений и систем</u>

1. Уравнения с разделяющимися переменными

2. Однородные уравнения

3. Линейные уравнения первого порядка. Метод вариации произвольной постоянной. Уравнения, сводящиеся к линейным

4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

5. Уравнения, не разрешенные относительно производной

6. Уравнения, допускающие понижение порядка

Задача Коши и краевые задачи

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

2. Зависимость решения от параметров и начальных данных

3. Краевые задачи

Задача Коши и краевые задачи

1. Краевые задачи

Линейные уравнения и системы

1. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

2. Линейные системы с постоянными коэффициентами

3. Уравнения с переменными коэффициентами

Теория устойчивости

1. Устойчивость

2. Особые точки. Фазовая плоскость

Уравнения с частными производными первого порядка

4. Учебно-методическое обеспечение по дисциплине

Список основной учебной литературы

1. Филиппов, А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: [сб. задач для вузов] / А. Ф. Филиппов. - М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. - 175 с.
2. Демидович, Б. П. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Б. П. Демидович, В. П. Модестов. - 3-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2008. - 276 с.
3. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений/ Ю.Н. Бибиков. СПб.: Лань, 2011. Точка доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=1542

Список дополнительной учебной литературы

1. Кучер Н.А. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям, Кемерово, 1997.
2. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения, Мн: Выш. шк., 1976.
3. Самойленко А.С. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи, М.: Высшая школа, 1989.
4. Трель И.Л., Казаченко И.В., Петрушева И.И. Дифференциальные уравнения. Семестровые задания № 1 для студентов дневного отделения математического факультета, Кемерово, 2001.
5. Трель И.Л., Казаченко И.В., Петрушева И.И. Дифференциальные уравнения. Семестровые задания № 2 для студентов дневного отделения математического факультета, Кемерово, 2001.
6. Трель И.Л., Краюшкина М.В., Овсянникова Е.Г. Теория устойчивости. Учебно-методическое пособие для студентов дневного отделения математического факультета, Кемерово, 2004.
7. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения, М.-Л.: ГТТИ, 1950.

5. Формы текущего, промежуточного и рубежного контроля

Вопросы и задания для индивидуальной и самостоятельной работы

Общая теория линейных уравнений и систем

1. Сформулировать теорему существования и единственности решения линейного уравнения порядка n на заданном интервале.
2. Сформулировать и доказать теорему об общем решении линейной однородной системы.
3. Дать определение фундаментальной системы решений для линейной системы уравнений и доказать ее существование.
4. Что называется общим решением линейного неоднородного уравнения? Сформулировать теорему об этом решении.
5. Сформулировать основные свойства детерминанта Вронского.
6. Дать определение фундаментальной матрицы.
7. Написать фундаментальную матрицу для системы $x' = y, y' = 0$.
8. Как из одной фундаментальной матрицы можно получить другие?

Существование и единственность решения. Краевые задачи

9. Обосновать связи условия Липшица и дифференцируемости.
10. Изложить общий план доказательства теоремы существования и единственности.
11. Сформулировать и доказать утверждение о переходе то дифференциального уравнения к интегральному.
12. Доказать, что последовательные приближения сходятся к непрерывной функции.
13. Доказать, что предел последовательных приближений есть решение интегрального уравнения.
14. Сформулировать и доказать утверждение о единственности решения.
15. Сформулировать и доказать лемму об интегральном неравенстве.
16. Найти наименьшее положительное число T такое, что для уравнения $x'' - 2x' = 8\sin^2 t$ разрешима краевая задача с условиями $x'(0) = -1, x'(T) = -1$.

Устойчивость

17. Дать определение устойчивости по Ляпунову.
18. Сформулировать теорему об устойчивости по Ляпунову.
19. Доказать, что если одно решение линейной системы устойчиво, то устойчиво каждое решение системы.
20. Какому необходимому и достаточному условию должна удовлетворять матрица A, чтобы для любой непрерывной функции $h(t)$ каждое решение системы $\dot{x} = Ax + h(t)$ было устойчиво по Ляпунову?

21. При каких матрицах A система $\dot{x} = Ax$ имеет более одного положения равновесия?

22. Система $\dot{x} = Ax$ имеет частное решение, у которого известны только две координаты: $x_1 = \sin t + 2\cos t, x2 = \cos 2t.$ Устойчиво ли нулевое решение?

Уравнения с частными производными первого порядка

23. Написать общий вид квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка. Что называется характеристикой этого уравнения?
24. Сформулировать и доказать утверждение о связи решения уравнения с его характеристиками.
25. Как можно использовать первые интегралы некоторой вспомогательной системы ду для получения решения уравнения с частными производными?
26. Сформулировать постановку задачи Коши для квазилинейного уравнения с частными производными и теорему существования ее решения.
27. Сформулировать и доказать теорему о существовании решения задачи Коши для квазилинейного уравнения с частными производными первого порядка.

Перечень вопросов к коллоквиуму №1

1. Понятие дифференциального уравнения первого и высших порядков, системы дифференциальных уравнений
2. Понятие решения уравнения и систем дифференциальных уравнений
3. Уравнения с разделяющимися переменными
4. Однородные уравнения
5. Линейные уравнения
6. Метод вариации произвольной постоянной
7. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати
8. Уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель
9. Сжатые отображения. Оператор Пикара
10. Теорема единственности задачи Коши
11. Теорема существования задачи Коши
12. Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных данных. Постановка проблемы
13. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров. Лемма Адамара
14. Теорема о дифференцируемости решения задачи Коши по параметрам. Уравнение в вариациях

Перечень вопросов к коллоквиуму №2

1. Краевые задачи для линейных уравнений 2-го порядка. Функция Грина. Интегральное представление решения краевой задачи

2. Свойства решений линейных систем. Векторное пространство решений линейных систем. Линейная зависимость и независимость решений линейных систем. Теорема о размерности пространства решений линейной однородной системы. ФСР. Фундаментальная матрица
3. Представление общего решения линейной однородной системы при помощи фундаментальной матрицы. Определитель Вронского. Формула Лиувилля
4. Теорема о структуре общего решения линейной неоднородной системы. Метод вариации произвольных постоянных. Определение и свойства матричной экспоненты
5. Построение фундаментальной матрицы. Случай наличия полной системы линейно независимых собственных векторов. Случай отсутствия полной системы линейно независимых собственных векторов
6. Определение устойчивости по Ляпунову. Сведение исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения. Функция Ляпунова. Лемма Ляпунова
7. Теорема Четаева о неустойчивости. Исследование устойчивости нулевого решения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Лемма об оценке нормы решения
8. Теорема Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению

Примерный перечень заданий к зачету

<u>Общая теория дифференциальных уравнений и систем</u>

1. Проверить, является ли решением заданного уравнения первого порядка функция, заданная параметрически: $\begin{cases} t = t(p) \\ x = x(p) \end{cases}$

$$(1+tx)x' + x^2 = 0, \quad \begin{cases} t = pe^p \\ x = e^{-p} \end{cases}.$$

2. Среди всех интегральных кривых уравнения $x'' = 6t$ найти ту, которая касается прямой $x(t) = t$ в начале координат.

3. Найти кривые, у которых тангенс угла наклона между касательной и положительным направлением оси Ox обратно пропорционален абсциссе точки касания.

4. Найти кривые, у которых тангенс угла наклона между касательной и положительным направлением оси Ox прямо пропорционален абсциссе точки касания.

5. Найти общее решение уравнения

$$y' = \sqrt{3x+2y} - 3/2.$$

6. Проинтегрировать уравнение

$$(x-y)dx + (2y - x + 1)dy = 0.$$

7. Найти решение уравнения

$$2ydx + \left(y^2 - 2x\right)dy = 0.$$

8. Найти решение уравнения

$$y' = e^{x-y}.$$

9. Решить уравнение

$$y'\,x^3 \sin y = xy' - 2y.$$

10. Привести данное уравнение Риккати к уравнению Бернулли и решить его

$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$$

11. В сосуд, содержащий 3 л воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

<u>Задача Коши и краевые задачи</u>

1. Найти решение задачи Коши

$$x' - \frac{x}{t\ln t} = t\ln t, \quad x(e) = e^2/2.$$

2. Найти решение задачи Коши

$$xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$$

3. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями

$$y' = 2y^2 - x, \quad y(1) = 1.$$

4. Пользуясь каким-либо достаточным условием единственности, выделить области на плоскости x, y, в которых через каждую точку проходит единственное решение уравнения

$$(x-2)y' = \sqrt{y} - x.$$

5. При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения

$$(x+1)y'' = y + \sqrt{y}\,?$$

6. Могут ли графики двух решений уравнения $y' = x + y^2$ на плоскости x, y пересекаться в некоторой точке (x_0, y_0)?

7. Могут ли графики двух решений уравнения $y'' = x + y^2$ на плоскости x, y касаться друг друга в некоторой точке (x_0, y_0)?

8. Сколько существует решений уравнения $y' = x + y^2$, удовлетворяющих одновременно двум условиям: $y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$?

9. Доказать, пользуясь теоремой Пикара, существование и единственность решения, удовлетворяющего следующей задаче Коши

$$y' = sin(xy), \quad y(0) = 1.$$

Построить второе приближение к искомому решению (по методу Пикара).

10. Задачу $y' = y^2 + x, \quad y(1) = 0$ свести к интегральному уравнению и построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2.

11. Найти решение уравнения, удовлетворяющего заданным краевым условиям

$$y'' + y' = 2x - \pi, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

12. При каких a краевая задача $y'' + ay = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$ не имеет решений?

Линейные уравнения и системы

1. Найти общее решение уравнения

$$y' + 2y' = 4e^x(sin\,x + cos\,x).$$

2. Указать вид общего решения уравнения

$$y''' - 2y'' + y' = te^t(1 + cos\,t) + t.$$

3. Указать вид общего решения уравнения

$$y'' - 2iy' - y = 4\,sin\,x.$$

4. Построить однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, имеющее данные частные решения

$$y_1 = cos\,x, \quad y_2 = e^x.$$

5. При каких значениях p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ стремятся к нулю при $x \to \infty$?

6. При каких значениях p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ ограничены при всех $x \geq 0$?

7. При каких значениях p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ являются периодическими функциями от x?

8. Решить систему, записанную в векторной форме: $x' = Ax,$ где x - вектор, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ - заданная матрица.

9. Найти общее решение системы уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

10. Решить данную систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 4x - y - z \\ y' = x + 2y - z \\ z' = x - y + 2z \end{cases}.$$

11. Решить линейную неоднородную систему уравнений

$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t \\ y' = 2x - y - 2\cos t \end{cases}.$$

12. Перейти от уравнения $e^x y''' + xy = 2yy'$ к системе нормального вида.

13. Привести данную систему уравнений к одному уравнению относительно одной из искомых функций

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 9t \\ y' = 2x + y + 4e^t \end{cases}.$$

Теория устойчивости

1. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить, устойчивы ли решения данного уравнения с указанными начальными условиями

$$2tx' = x - x^3, \quad x(1) = 0.$$

2. Начертить на плоскости x, y траектории данной системы вблизи точки $(0,0)$ и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевой решение.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x^3\left(1 + y^2\right) \end{cases}.$$

3. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение

$$\begin{cases} x' = tg(y - x) \\ y' = 2^y - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) \end{cases}.$$

4. Исследовать, при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение

$$\begin{cases} x' = ax - 2y + x^2 \\ y' = x + y + xy \end{cases}.$$

5. Для данной системы найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \sin(x + y) \end{cases}.$$

6. Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функцию Ляпунова

$$\begin{cases} x' = x^3 - y \\ y' = x + y^3 \end{cases}.$$

7. Исследовать устойчивость нулевого решения

$$y''' + y'' + y' + 2y = 0.$$

8. Исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} x' = (2x - y)(x - 2) \\ y' = xy - 2 \end{cases}.$$

9. Начертить на фазовой плоскости траектории данной системы и исследовать особые точки системы

$$\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = (x - y)(x - y + 2) \end{cases}.$$

10. Начертить на фазовой плоскости траектории системы, записанной в полярных координатах, и исследовать, имеются ли предельные циклы

$$\begin{cases} r' = r\left(1 - r^2\right) \\ \varphi' = 1 \end{cases}.$$

<u>Уравнения с частными производными первого порядка</u>

1. Найти общее решение уравнения

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^x.$$

2. Найти решение уравнения, удовлетворяющее указанным условиям

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = x^2 + y^2 \text{ при } z = 0.$$

3. Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \quad x = 2, \quad z = y^2 + 1.$$

4. Найти общее уравнение поверхностей, пересекающих под прямым углом поверхности семейства

$$z^2 = Cxy.$$

5. Найти поверхность, проходящую через прямую

$$y = x, \quad z = 1$$

и ортогональную к поверхностям

$$x^+ + y^2 + z^2 = Cx.$$

Перечень вопросов к экзамену

<u>Общая теория дифференциальных уравнений и систем</u>

1. Понятие дифференциального уравнения второго и высших порядков, системы дифференциальных уравнений
2. Решение уравнения и систем дифференциальных уравнений
3. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения и его решения
4. Интегрируемые классы дифференциальных уравнений первого порядка
5. Интегрирование уравнений вида $x = f(x), \ x = f(t)$

6. Уравнения с разделяющимися переменными
7. Однородные уравнения
8. Линейные уравнения. Свойства решений. Метод вариации произвольной постоянной. Уравнение Бернулли. Уравнение Риккати
9. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Задача Коши и краевые задачи

1. Сжатые отображения. Оператор Пикара
2. Теорема единственности задачи Коши
3. Теорема существования решения задачи Коши
4. Продолжение решения задачи Коши. Непродолжаемые решения и их свойства
5. Теорема о поведении интегральной линии непродолжаемого решения
6. Зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных данных. Постановка проблемы
7. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров. Лемма Адамара
8. Теорема о дифференцируемости решения задачи Коши по параметрам. Уравнения в вариациях. Сведение исследования зависимости решения от начальных данных к исследованию зависимости от параметров. Формулировки теорем о непрерывной зависимости и дифференцируемости решения по начальным данным
9. Формулировки основных теорем существования и единственности для нормальных систем дифференциальных уравнений
10. Краевые задачи для линейных уравнений второго порядка. Функция Грина. Интегральное представление решения краевой задачи

Линейные уравнения и системы

1. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Оператор дифференцирования. Формула смещения. Теоремы о структуре общего решения линейного однородного уравнения (случай простых, кратных корней характеристического уравнения)
2. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Структура решения. Частное решение линейного неоднородного уравнения с квазимногочленом в правой части
3. Свойства решений линейных систем. Линейная зависимость и независимость решений линейных систем. ФСР линейной однородной системы. Фундаментальная матрица
4. Представление общего решения линейной однородной системы при помощи фундаментальной матрицы. Определитель Вронского. Формула Лиувилля
5. Теорема о структуре общего решения линейной неоднородной системы. Метод вариации произвольных постоянных
6. Построение фундаментальной матрицы. Случай наличия полной системы линейно независимых собственных векторов. Случай отсутствия полной системы линейно независимых собственных векторов

Теория устойчивости

1. Постановка задачи. Определение устойчивости по Ляпунову. Сведение исследования устойчивости произвольного решения к исследованию устойчивости нулевого решения. Функция Ляпунова. Лемма Ляпунова

2. Теорема Четаева о неустойчивости. Исследование устойчивости нулевого решения системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Лемма об оценке нормы решения

3. Теорема Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению

4. Автономные системы. Фазовое пространство. Свойства решений автономных систем. Типы траекторий автономных систем

5. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

6. Первые интегралы. Теорема существования независимых первых интегралов. Общий вид первого интеграла. Построение первого интеграла путем приведения системы к симметричной форме

Уравнения с частными производными первого порядка

1. Линейные уравнения с частными производными первого порядка

2. Постановка задачи Коши для линейных уравнений. Теорема единственности решения задачи Коши

Типовые экзаменационные билеты

Кемеровский Государственный Университет

Математический Факультет

Кафедра дифференциальных уравнений

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Билет 1

1) Решение линейных уравнений первого порядка. Метод вариации постоянной.

2) Определение системы дифференциальных уравнений первого порядка нормального вида. Область определения системы. Понятие решения.

3) Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x).$$

4) С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение следующей системы уравнений

$$\begin{cases} x' = tg(y - x), \\ y' = 2^y - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right). \end{cases}$$

Зав.кафедрой:

Кемеровский Государственный Университет

Математический Факультет

Кафедра дифференциальных уравнений

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Билет 2

1) Определение устойчивости по Ляпунову.
2) Уравнения в полных дифференциалах.
3) Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + y' = te^t(1 + \cos t) + t.$$

4) Для данной системы найти все положения равновесия и исследовать их на устойчивость

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \sin(x + y). \end{cases}$$

Зав.кафедрой:

Примерный перечень вариантов контрольных работ

Контрольная работа №1

1. Проинтегрировать уравнение и выделить интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M(x_0, y_0)$, выяснив предварительно вопрос о существовании и единственности этой интегральной кривой

$$\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0, \quad M(1,0).$$

2. Найти решение уравнения

$$y' + 2xy = 2x^3y^3.$$

3. Найти решение уравнения

$$xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x.$$

4. Указать какой-нибудь отрезок, на котором существует решение с данными начальными условиями

$$y' = 2y^2 - x, \quad y(1) = 1.$$

5. Найти решение уравнения

$$y' = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}.$$

6. Построить последовательные приближения y_0, y_1, y_2 к решению данного уравнения с данными начальными условиями

$$y' = y^2 + 3x^2 - 1, \quad y(1) = 1.$$

Контрольная работа №2

1. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = 2z - y - x \\ z' = y + x - 2 \end{cases}.$$

3. С помощью теоремы о первом приближении исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} x' = e^{x+2y} - \cos 3x \\ y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y \end{cases}.$$

4. Найти общее решение уравнения, зная его частное решение

$$xy'' + 2y' - xy = 0, \quad y_{\div} = \frac{e^x}{x}.$$

5. Исследовать особые точки и начертить на фазовой плоскости траектории данной системы

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = y - 2x \end{cases}.$$

6. Найти поверхность, удовлетворяющую данному уравнению и проходящую через данную линию

$$\left(y + 2z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad x = z, \quad y = x^2.$$

Примерный перечень вариантов тестовых вопросов

В

Вариант №1

1. При каких начальных условиях существует единственное решение уравнения $(t+1)x''=x+\sqrt{x}$
а) $x(0)=1$; б) $x(0)=1, x'(0)=2$; в) $x(0)=-1, x'(0)=1$.

2. Порядок линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, имеющего частные решения $y_1=x^2e^x, y_2=e^{-x}$ равен
а) $n=1$; б) $n=2$; в) $n\geq 4$.

3. Если $y_1=e^{2x}, y_2=xe^{2x}, y_3=e^{4x}$ - фундаментальная система решений линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами, то это уравнения порядка
а) $n=1$; б) $n=2$; в) $n=3$.

4. Функция $y=x^2e^x$ является частным решением:
а) $y''-2y'+y=0$; б) $y'''-2y''+y'=0$; в) $y'''-3y''+3y'-y=0$.

5. Если $y_1=e^{2x}\sin 3x, y_2=x^2$ - частные решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, то среди корней характеристического уравнения есть
а) $\lambda_1=1, \lambda_{2,3}=2\pm 3i$;
б) $\lambda_1=2, \lambda_2=3i, \lambda_3=0$;
в) $\lambda_1=0, \lambda_{2,3}=2\pm 3i$.

6. Указать общий вид частного решения дифференциального уравнения $y''-6y'+5y=-3e^x+5x^2-12x+2$
а) $y=ae^x+bx+c$; б) $y=axe^x+bx^2+cx+d$; в) $y=ae^{5x}+ax^2$.

7.Характеристическое уравнение $\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$ соответствует линейному однородному уравнению:
а) $y'''+3y''+2y=0$; б) $y'''+3y''+2y'=0$; в) $y'''+3y'+2y=0$.

В

8. Указать вид общего решения уравнения $y''-y=0$:
а) $y=C_1e^{2x}$; б) $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$; в) $y=C_1e^{5x}$.

9. Какие начальные условия для уравнения $y''-2y'+y=0$ корректны
а) $y(1)=2$; б) $y'(0)=1, y''(0)=2$; в) $y(0)=0, y'(0)=1$.

10. Системы дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных от искомых функций называются
а) линейными системами; б) однородными системами; в) нормальными системами.

11. Начальные условия для системы $\begin{cases} y'=2y \\ z'=y+2z \end{cases}$ могут быть заданы в виде:
а) $\begin{matrix} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{matrix}$; б) $\begin{matrix} y(0)=1 \\ z(0)=0 \end{matrix}$; в) $\begin{matrix} y(1)=0 \\ z(0)=0 \end{matrix}$.

12. Если решение линейной однородной системы обращается в нуль хотя бы і одной точке, то оно
а) равно константе; б) тождественно равно нулю; в) положительно.

Типовые варианты семестровых заданий

Семестровая работа №1

Курс дифференциальных уравнений изучается студентами дневного отделения второго курса в течение двух семестров. За это время студенты должны выполнить три семестровые работы. Данное пособие содержит первую семестровую работу, каждый вариант которой состоит из девяти заданий. В задачах 1-8 нужно, определив тип уравнения (наиболее простой), решить его. В задаче 9 – проверить корректность поставленной задачи Коши и найти, используя метод последовательных приближений, первые два приближения.

Вариант 1

1. $2xy \ln y \, dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\, dy = 0$
2. $\dfrac{dx}{x^2+3y^2} = \dfrac{dy}{y^2-2xy}$
3. $2e^x y' - y'^2 - y^2 = 0$
4. $2x^2 y\, dy - (y^2 - 2y)\, dx = 0$
5. $y' = y(e^x + lny), \quad y(1) = 0$
6. $(x - 2y - 1)\, dx + (3x - 6y + 2)\, dy = 0$
7. $2x^3 yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0$
8. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - 4}$
9. $y' = x^2 + y^2 + 4, \quad y(0) = 0$

Семестровая работа №2

1. Пользуясь определением устойчивости Ляпунова, выяснить, устойчиво ли решение поставленной задачи Коши.

2. Найти все положения равновесия данной системы, и, используя теорему об устойчивости по первому приближению, исследовать их на устойчивость.

3,4. Построив функцию Ляпунова, доказать устойчивость нулевого решения данной системы.

5,6. Построить фазовый портрет автономной системы уравнений.

Вариант 1

1. $y' = y - x,\ y(0) = 1$

2. $\begin{cases} x' = (y^2 - x)y \\ y' = x - y - 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x' = y - 5x^5 \\ y' = -x^2y^3 - 2x \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 2x^5y^6 - 10x^{11} \\ y' = x^6y^5 - y^{11} - yx^4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2y - 2x \end{cases}$