

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Кемеровский государственный университет
Институт фундаментальных наук

«УТВЕРЖДАЮ» Директор института



Гудов А.М.

2017 г.

Рабочая программа дисциплины

Интегральные уравнения и вариационное исчисление

Направление подготовки

03.03.02 Физика

Направленность (профиль) подготовки

«Физическое материаловедение»

Уровень бакалавриата

Форма обучения

очная

Кемерово 2017

Утверждена с обновлениями Ученым советом Физического факультета (протокол Ученого совета факультета № 9 от 17 февраля 2014 г.)

Утверждена с обновлениями Ученым советом Физического факультета (протокол Ученого совета факультета № 11 от 20 февраля 2015 г.)

Утверждена с обновлениями Ученым советом Физического факультета (протокол Ученого совета факультета № 7 от 15 февраля 2016 г.)

Рабочая программа утверждена с обновлениями Учёным советом Института фундаментальных наук (протокол Учёного совета № 7 от 20.02.2017)

Рабочая программа дисциплины одобрена на заседании кафедры теоретической физики (протокол № 5 от 16.02.2017 г.)

Зав. кафедрой Поплавной А.С.

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения ООП бакалавриата обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

Коды компетенции	Результаты освоения ООП Содержание компетенций	Перечень планируемых результатов по дисциплине
ОПК-2	способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей	<ul style="list-style-type: none"> • Знать: 1. Классификацию интегральных уравнений; 2. Уравнение Фредгольма. 3. Теоремы Фредгольма. 4. Альтернативу Фредгольма. 5. Приближенные методы решения уравнений Фредгольма 6. Уравнение Вольтерра. 7. Метод последовательных приближений при решении уравнений Вольтерра 2-го рода. 8. Функционал. Необходимое и достаточные условия экстремума функционала. 9. Задачи на условный экстремум, с закрепленными границами и с подвижной границей. • Уметь: 1. Решать стандартные задачи с интегральными уравнениями. • Владеть: 1. Навыками выбора оптимального способа решения задач.

2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Интегральные уравнения и вариационное исчисление» относится к модулю Математика базовой части Блока 1 «Дисциплины (модули)» программы бакалавриата. Студенты, обучающиеся по данному курсу должны знать основы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, векторного и тензорного анализа.

Дисциплина изучается на 2 курсе в 4 семестре.

3. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем и на самостоятельную работу обучающихся

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы (108 академических часа), из которых 38 часов – аудиторные занятия и 34 часа – самостоятельная работа; учебное время распределено в течение 1 семестра.

3.1. Объем дисциплины по видам учебных занятий (в часах).

Очная форма обучения

Вид учебной работы	Всего часов
Общая трудоемкость дисциплины	108
Контактная работа обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) (всего)	38

Аудиторная работа (всего):	38
в т. числе:	
Лекции	19
Семинары, практические занятия	19
в т.ч. в активной и интерактивной формах	19
Внеаудиторная работа (всего):	0
Самостоятельная работа обучающихся (всего)	34
Вид промежуточной аттестации обучающегося (зачет / экзамен)	36, экзамен

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкость по видам учебных занятий (в академических часах)

для очной формы обучения

№ п/п	Раздел дисциплины	Общая трудоемкость (часов)	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу обучающихся и трудоемкость (в часах)			Формы текущего контроля успеваемости
			аудиторные учебные занятия		самостоятельная работа обучающихся	
			всего	лекции		
1.	Интегральные уравнения	33	10	19	4	Устный опрос, контроль выполнения домашнего задания
2.	Вариационное исчисление	39	9	0	30	Устный опрос, контроль выполнения домашнего задания

2.2 . Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание
1	Интегральные уравнения	
<i>Содержание лекционного курса</i>		
1.1.	Интегральные уравнения. Основные определения. Их классификация.	Классификация интегральных уравнений. Физические примеры. Уравнения Фредгольма. Формулы Фредгольма.
1.2.	Теоремы Фредгольма	Первая, вторая теоремы Фредгольма
1.3.	Теоремы Фредгольма	Третья теорема Фредгольма, альтернатива Фредгольма
1.4	Приближенные методы решения уравнений Фредгольма	Замена ядра интегрального уравнения вырожденным ядром, Замена интеграла конечной суммой, метод последовательных приближений, метод Бубнова – Галёркина, Метод Ритца.
1.5.	Интегральные уравнения Вольтерра.	Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты. Метод последовательных приближений при решении уравнений Вольтерра 2-го рода.
<i>Темы практических/семинарских занятий</i>		
1.1	Интегральные уравнения Вольтерра и Фредгольма.	Классификация интегральных уравнений Вольтерра и Фредгольма.
1.2	Уравнение Фредгольма. Метод определителей Фредгольма.	Решение уравнений Фредгольма методом определителей Фредгольма
1.3	Интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром.	Решение неоднородных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром. Случай регулярных λ .
1.4	Характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.	Нахождение характеристических чисел и собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденным ядром.
1.5	Характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром.	Нахождение характеристических чисел и собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным ядром.
1.6	Альтернатива Фредгольма	Теоремы Фредгольма, альтернатива Фредгольма
1.7	Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями	Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра.

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание
	ми Вольтерра.	
1.8	Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты.	Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты.
1.9	Контрольная работа	
3	Вариационное исчисление	
<i>Содержание лекционного курса</i>		
2.1.	Экстремум функционалов	Определение функционала. Близость кривых. Непрерывность функционала. Вариация функционала. Вторая вариация функционала. Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума.
2.2.	Экстремум функционалов	Уравнение Эйлера. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления. Инвариантность уравнений Эйлера.
2.3	Экстремум функционалов	Поле экстремалей. Достаточные условия экстремума функционала. Условный экстремум.
2.4	Прямые методы вариационного исчисления.	Конечно-разностный метод Эйлера. Вариационные методы нахождения собственных значений и собственных функций.

5. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

1. Золотарев, М.Л. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: учебное пособие [Электронный ресурс] : справочник / М.Л. Золотарев, И.А. Федоров. — Электрон. дан. — Кемерово : Издательство КемГУ (Кемеровский государственный университет), 2014. — 116 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=58320

6. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

6.1. Паспорт фонда оценочных средств по дисциплине (модулю)

№ п/п	Контролируемые разделы (темы) дисциплины (результаты по разделам)	Код контролируемой компетенции (или её части) / и ее формулировка – по желанию	наименование оценочного средства
1.	Интегральные уравнения	ОПК-2	Устный опрос, контроль выполнения домашнего задания, контрольная работа, экзамен
2.	Вариационное исчисление	ОПК-2	Устный опрос, контроль выполнения домашнего задания, экзамен

2. Типовые контрольные задания или иные материалы

6.2.1. Экзамен

а) типовые вопросы к экзамену

1. Понятие интегрального уравнения. Классификация интегральных уравнений.
2. Теория Фредгольма, формулы Фредгольма (определитель Фредгольма, минор Фредгольма, резольвента Фредгольма, формула для решения уравнения Фредгольма).
3. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Понятие характеристических и регулярных значений λ .
4. Понятие вырожденного ядра. Первая, вторая и третья теоремы Фредгольма, теорема об альтернативе.
5. Приближенные методы решения уравнений Фредгольма (замена ядра интегрально уравнения вырожденным ядром, замена интеграла конечной суммой, метод последовательных приближений, метод Бубнова-Галёркина, метод Рунца)
6. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и уравнениями Вольтерра.
7. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты.
8. Применение метода последовательных приближений при решении уравнений Вольтерра 2-го рода
9. Определение функционала. Близость кривых, определение расстояния между кривыми. Непрерывность функционала. Определение линейного функционала, приращения функционала, вариации функционала. Определение билинейного функционала, квадратичного функционала, второй вариации функционала.
10. Экстремум функционала, уравнение Эйлера. Определение экстремали, свойства экстремали (в каких точках может иметь излом, теорема Бернштейна). Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера. Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления. Инвариантность уравнений Эйлера. Поле экстремалей. Достаточные условия экстремума функционала. Условный экстремум.
11. Конечно-разностный метод Эйлера. Вариационные методы нахождения собственных значений и собственных функций.

типовые задачи к экзамену:

1. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения:

$$\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = \cos 2x$$

2. Решить интегральное уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \cos t + t^2 \sin x + \cos x \sin t) \varphi(t) dt = x$$

3. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2xt - 4x^2) \varphi(t) dt = 0$$

6.2.2. типовые домашние задания

Занятие 1.

Задача 1. Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих интегральных уравнений Вольтерра:

№	Функция	Уравнение
1.	$\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$	$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2} \varphi(t) dt$
2.	$\varphi(x) = \frac{x}{(1+x^2)^{5/2}}$	$\varphi(x) = \frac{3x+2x^3}{3(1+x^2)^2} - \int_0^x \frac{3x+2x^3+t}{(1+x^2)^2} \varphi(t) dt$
3.	$\varphi(x) = xe^x$,	$\varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt$
4.	$\varphi(x) = x - \frac{x^3}{6}$,	$\varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi(t) dt$
5.	$\varphi(x) = 1 - x$,	$\int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = x$
6.	$\varphi(x) = 3$,	$x^3 = \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt$
7.	$\varphi(x) = \frac{1}{2}$,	$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \sqrt{x}$
8.	$\varphi(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}$,	$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}} dt = 1$

7. **Задача 2.** Проверить, какие из заданных функций являются решениями интегральных уравнений Фредгольма:

№	Функция	Уравнение
1.	$\varphi(x) = 2e^x \left(x - \frac{1}{3}\right)$,	$\varphi(x) + 2 \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t) dt = 2xe^x$ (да)
2.	$\varphi(x) = e^x$,	$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 \sin(x+t) \varphi(t) dt = 1$ (нет)
3.	$\varphi(x) = \cos x$,	$\varphi(x) - \int_0^\pi (x^2+t) \cos t \varphi(t) dt = \sin x$ (нет)
4.	$\varphi(x) = xe^{-x}$,	$\varphi(x) - 4 \int_0^\infty e^{-(x+t)} \varphi(t) dt = (x-1)e^{-x}$ (да)

8. **Задача 3.** Показать, что заданные функции являются решениями соответствующих интегральных уравнений Фредгольма:

№	Функция	Уравнение	Ядро
---	---------	-----------	------

$$\begin{aligned}
1. \quad \varphi(x) = \sin \frac{\pi x}{2} \quad \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 K(x, t) \varphi(t) dt &= \frac{x}{2} & K(x, t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2}, & 0 \leq x \leq t \\ \frac{t(2-x)}{2}, & t \leq x \leq 1 \end{cases} \\
2. \quad \varphi(x) = \cos 2x \quad \varphi(x) - 3 \int_0^1 K(x, t) \varphi(t) dt &= \cos x & K(x, t) = \begin{cases} \sin x \cos t, & 0 \leq x \leq t \\ \sin t \cos x, & t \leq x \leq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Занятие 2.

Задача 1. С помощью определителей Фредгольма найти резольвенту ядра $K(x, t) = xe^t$; $a=0, b=1$.

Задача 2. Решить интегральное уравнение: $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xe^t \varphi(t) dt = f(x)$, если $f(x) = e^{-x}$.

Задача 3. Показать, что для уравнения

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 xt \varphi(t) dt$$

определитель Фредгольма $D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{3}$, а минор Фредгольма $D(x, t, \lambda) = xt$.

Задача 4. Показать, что для уравнения

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_0^1 (xt + t^2) \varphi(t) dt$$

определитель Фредгольма $D(\lambda) = 1 - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{72}\lambda^2$,

а минор Фредгольма $D(x, t, \lambda) = xt + t^2 + \lambda \left(\frac{1}{2}xt^2 - \frac{1}{3}xt - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{4}t \right)$.

Задача 5. Показать что если $K(x, t) = f_1(x)f_2(t)$ и $\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = A$, то

$$D(\lambda) = 1 - A\lambda, \quad D(x, t, \lambda) = f_1(x)f_2(t)$$

и решение соответствующего неоднородного интегрального уравнения с правой частью $f(x)$ имеет вид:

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - A\lambda} \int_a^b f_2(t) f(t) dt$$

Задача 6. Пользуясь определителями Фредгольма найти резольвенты следующих ядер:

- $K(x, t) = 2x - t, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$
- $K(x, t) = x^2 t - t^2 x, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$
- $K(x, t) = \sin x \cos t, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 2\pi$
- $K(x, t) = \sin x - \sin t, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 2\pi$

Задача 7. Пользуясь формулами (8) и (9) найти резольвенты следующих ядер:

- $K(x, t) = x - 2t, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$
- $K(x, t) = x + t + 1, \quad -1 \leq x \leq 1, -1 \leq t \leq 1$
- $K(x, t) = 1 + 3xt, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$
- $K(x, t) = 4xt - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$
- $K(x, t) = e^{x-t}, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1$
- $K(x, t) = \sin(x + t), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 2\pi$

Задача 8. С помощью резольвенты решить следующие интегральные уравнения:

- $\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x + t) \varphi(t) dt = 1$
- $\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2x - t) \varphi(t) dt = \frac{x}{6}$

$$3. \quad \varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = \cos 2x$$

$$4. \quad \varphi(x) + \int_0^1 e^{x-t} \varphi(t) dt = e^x$$

$$5. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (4xt - x^2) \varphi(t) dt = x$$

К занятиям 3-6

Задача 1. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ следующие интегральные уравнения:

$$1. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x+t) \varphi(t) dt = \cos 3x$$

$$2. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos^2 x \varphi(t) dt = 1$$

$$3. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 x e^t \varphi(t) dt = x$$

$$4. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\frac{-1}{2\pi}} |x - \pi| \varphi(t) dt = x$$

$$5. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (2xt - 4x^2) \varphi(t) dt = 1 - 2x$$

$$6. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x^2 - 2xt) \varphi(t) dt = x^3 - x$$

$$7. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\frac{-1}{2\pi}} \left(\frac{1}{\pi} \cos x \cos t + \frac{1}{\pi} \sin 2x \sin 2t \right) \varphi(t) dt = \sin x$$

Задача 2. При каких значениях параметров α , β (и γ) разрешимы следующие интегральные уравнения?

$$1. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x t^2 \varphi(t) dt + \alpha x + \beta$$

$$2. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x t \varphi(t) dt + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

$$3. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+t) \varphi(t) dt + \alpha e^x + \beta x$$

$$4. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x t \varphi(t) dt + \alpha x + \beta \sin x$$

К занятию 7.

Задача 1. Составить интегральные уравнения, соответствующие записанным дифференциальным уравнениям с начальными условиями:

$$1. \quad y'' + xy' + y = 0,$$

$$2. \quad y'' + y = 0,$$

$$3. \quad y' - y = 0,$$

$$4. \quad y'' + y = \cos x$$

$$5. \quad y'' - 5y' + 6y = 0,$$

$$6. \quad y'' - y' \sin x + e^x y = x,$$

$$7. \quad y'' + (1+x^2)y = \cos x,$$

$$8. \quad y''' + xy'' + (x^2 - x)y = xe^x + 1,$$

$$9. \quad y''' - 2xy = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y(0) = 1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

$$y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$$

$$y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = y''(0) = 1$$

Задача 2. Методом дифференцирования решить следующие интегральные уравнения Вольтерра:

$$1. \quad \varphi(x) = x + \int_0^x xt \varphi(t) dt$$

$$4. \quad \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = x$$

$$2. \quad \varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

$$5. \quad \varphi(x) = 2 \int_0^x \frac{2t+1}{(2x+1)^2} \varphi(t) dt + 1$$

$$3. \quad \int_0^x e^{x+t} \varphi(t) dt = x$$

$$6. \quad \varphi(x) = e^x + \int_0^x \varphi(t) dt$$

К занятию 8.

Задача 1. Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра со следующими ядрами:

$$1. \quad K(x, t) = 1$$

$$2. \quad K(x, t) = x - t$$

$$3. \quad K(x, t) = e^{x-t}$$

$$4. \quad K(x, t) = e^{x^2-t^2}$$

$$5. \quad K(x, t) = \frac{1+x^2}{1+t^2}$$

$$6. \quad K(x, t) = \frac{2+\cos x}{2+\cos t}$$

$$7. \quad K(x, t) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{ch} t}$$

Задача 2. Используя результаты предыдущей задачи с помощью резольвент найти решения следующих интегральных уравнений:

$$1. \quad \varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t) dt$$

$$2. \quad \varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

$$3. \quad \varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$$

$$4. \quad \varphi(x) = e^x \sin x + \int_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t} \varphi(t) dt$$

$$5. \quad \varphi(x) = 1 - 2x - \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t) dt$$

$$6. \quad \varphi(x) = e^{x^2+2x} + 2 \int_0^x e^{x^2-t^2} \varphi(t) dt$$

$$7. \quad \varphi(x) = 1 + x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2} \varphi(t) dt$$

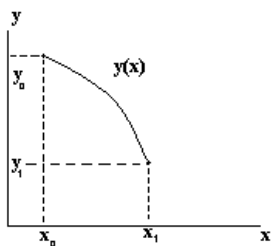
Домашние задания к разделу «Вариационное исчисление»

1. Найти экстремума функционалов вида $I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx$ для функ-

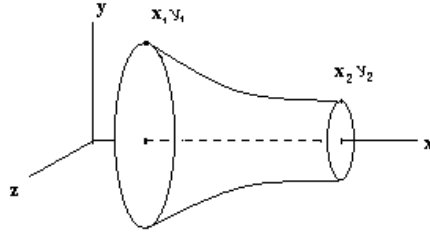
ций с условиями $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$.

2. Найти экстремальные кривые функционала (минимум длины кривой рис. 1)

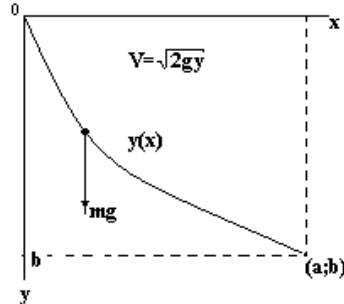
$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2(x)} dx, \quad \text{при условиях } y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$



3. Найти экстремальную кривую, соответствующую минимальной площади поверхности вращения.



4. Пример 4. Найти кривую, проходящую через две заданные на плоскости точки при условии минимума времени движения материальной точки по данной кривой в поле сил тяжести, считая связь идеальной (трения нет).



5. Найти экстремаль функционала

$$D[z(x, y)] = \iint_D [(\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2] dx dy, \quad \bar{D} = C, \quad (x, y) \in C, \quad z(x, y) = f(x, y).$$

6. Найти экстремаль функционала

$$D[z(x, y)] = \iint_D [(\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2 + 2zg(x, y)] dx dy, \quad \bar{D} = C, \quad (x, y) \in C, \quad z(x, y) = f(x, y).$$

7. Найти поверхность минимальной площади, натянутую на контур C .

8. Пользуясь принципом Остроградского-Гамильтона, т.е. минимума $\int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt$,

где T – кинетическая энергия, а U – потенциальная энергия системы, найти уравнения движения системы материальных точек массы $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ с координатами $(x_i; y_i; z_i)$ под действием сил, с потенциалом $-U$ при наличии связей $\Phi_k(t, x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0$.

Примерные варианты контрольных работ:

Контрольная работа №1

Вариант 1

1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \frac{ch t}{ch x} \varphi(t) dt$$

2. Исследовать на разрешимость при различных значениях параметра λ интегральное уравнение:

$$\varphi(x) = 1 - \frac{3}{2}x + \lambda \int_0^1 (1 + 2x)\varphi(t) dt$$

6.3 Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций

Студенту при сдаче теоретического материала и решении индивидуального задания необходимо показать свою способность демонстрировать углубленные знания в области математики и естественных наук. Если студент пропустил занятие, он может его «отработать» – прийти с выполненным заданием к преподавателю в часы назначенных консультаций.

а) критерии оценивания компетенций (результатов) на экзамене

Оценка «отлично» (86-100 баллов по 100-бальной шкале) выставляется студенту, который:

- владеет методологией данной дисциплины, знает определения основных понятий;
- полно раскрывает содержание теоретических вопросов билета
- умеет увязать теорию и практику при решении задач билета;

Оценка «хорошо» (66-85 баллов по 100-бальной шкале) выставляется студенту, который:

- Сделал все, что требуется для получения оценки «отлично», однако при этом допустил незначительные неточности при изложении материала, не искажающие содержание ответа по существу вопроса.

Оценка «удовлетворительно» (51-65 баллов по 100-бальной шкале) выставляется студенту, который:

- владеет методологией данной дисциплины, знает определения основных понятий;
- раскрывает содержание не всех теоретических вопросов билета
- не всегда умеет увязать теорию и практику при решении задач билета;

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, который:

- имеет пробелы в знаниях основного учебного материала по дисциплине, не может дать четкого определения основных понятий;
- не умеет решать задачи и не может разобраться в конкретной ситуации;
- не может успешно продолжать дальнейшее обучение в связи с недостаточным объемом знаний.

б) описание шкалы оценивания

Формирование балльной системы оценки для дисциплины

№	Вид деятельности	Комментарий	Максимальный балл	Количество	Суммарный текущий балл
1	Лекция	Посещение лекционных занятий	1	9	9
2	Практическое занятие (семинар/лабораторная работа)	Работа у доски, самостоятельное решение дополнительных задач с обязательным показом преподавателю	1	5	5
3	Другой вид деятельности	Контроль выполнения домашних заданий	1	8	8
4	Контрольная работа, тест по итогам занятия		8	1	8
					R_i текущий = 30
	Экзамен		20	1	R_i итоговый = 20

Максимальная сумма баллов, набираемая студентом по дисциплине – 50 баллов.

- Посещение лекций оценивается в 1 балл. Итого максимальный балл за посещение лекций – 9.
- выполнение домашнего задания оценивается в 1 балл. Итого максимальный балл за выполнение домашних заданий – 8 (не задаются домашние задания на контрольной работе).
- Работа на практическом занятии у доски оценивается максимально в 1 балл, самостоятельная работа на месте максимально в 1 балл (с обязательным показом решенных задач). При этом предполагается, что студент не каждое занятие имеет возможность работать у доски (из-за большого количества студентов в подгруппе). Итого максимальный балл за работу на практических занятиях – 5 баллов.
- на контрольной работе студент имеет возможность заработать максимально 8 баллов за два задания.
- Для ликвидации задолженностей по пропущенным занятиям или невыполненным домашним заданиям необходимо принести и показать законспектированные фрагменты лекций и практических занятий, выполненные домашние задания.
- На экзамене студенту предлагается теоретический вопрос из произвольных разделов, а также задача. Полный и правильный ответ на каждый из вопросов оценивается в 10 баллов.

Итого: за семестр студент имеет возможность набрать 30 баллов, за экзамен 20 баллов, всего 50. Для перехода на 100-балльную систему все набранные все баллы умножаются на 2.

Т. о. общий балл по дисциплине ($R_i^{уч}$), переведённый в 100 балльную шкалу рассчитывается по формуле: $R_i^{уч} = R_i^{тек} \cdot 2$.

В зависимости от суммарного количества набранных баллов по 100-балльной системе студенту выставляются следующие итоговые оценки:

- 86-100 баллов – «отлично»;
- 66-85 баллов – «хорошо»;
- 51-65 баллов – «удовлетворительно»;
- 0-50 баллов – «неудовлетворительно».

Для студента достигнутый уровень обученности (итоговая отметка) определяется в соответствии с алгоритмом, приведенным в таблице.

Уровни усвоения материала и сформированности способностей деятельности	Конкретные действия студентов, свидетельствующие о достижении данного уровня
Первый меньше 50 баллов «неудовлетворительно»	Результаты обучения студентов свидетельствуют об усвоении ими некоторых элементарных знаний основных вопросов по дисциплине. Допущенные ошибки и неточности показывают, что студенты не овладели необходимой системой знаний по дисциплине.
Второй (репродуктивный) от 51 до 65 баллов «удовлетворительно»	<p>Достигнутый уровень оценки результатов обучения показывает, что студенты обладают необходимой системой знаний и владеют некоторыми умениями по дисциплине. Студенты способны понимать и интерпретировать освоенную информацию, что является основой успешного формирования умений и навыков для решения практико-ориентированных задач:</p> <ul style="list-style-type: none"> – воспроизводят термины, конкретные факты, методы и процедуры, основные понятия, правила и принципы; – проводят простейшие расчеты; – выполняют задания по образцу (или по инструкции).

Третий (реконструктивный) от 66 до 85 баллов «хорошо»	Студенты продемонстрировали результаты на уровне осознанного владения учебным материалом и учебными умениями, навыками и способами деятельности по дисциплине. Студенты способны анализировать, проводить сравнение и обоснование выбора методов решения заданий в практико-ориентированных ситуациях, а именно: <ul style="list-style-type: none"> – объясняет правила, принципы; – преобразует словесный материал в математические выражения; – предположительно описывает будущие последствия, вытекающие из имеющихся данных; – применяет законы, теории в конкретных практических ситуациях; – использует понятия и принципы в новых ситуациях.
Четвертый (творческий) от 86 до 100 баллов «отлично»	Студенты способны использовать сведения из различных источников для успешного исследования и поиска решения в нестандартных практико-ориентированных ситуациях: <ul style="list-style-type: none"> – оценивает соответствие выводов имеющимся данным;

7. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

а) основная литература:

1. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие / А. Б. Васильева [и др.]. - 3-е изд., испр. - СПб. : Лань, 2010. - 429 с. : ил., рис. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 428-429.
2. Васильева, А. Б. Интегральные уравнения [Текст] : учебник для вузов / А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов. - 3-е изд. - СПб. : Лань, 2009 - 160 с.
http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=42 (дата последнего обращения: 09.10.2017)
3. Золотарев, М.Л. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве: учебное пособие [Электронный ресурс] : справочник / М.Л. Золотарев, И.А. Федоров. — Электрон. дан. — Кемерово : Издательство КемГУ (Кемеровский государственный университет), 2014. — 116 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=58320 (дата последнего обращения: 09.10.2017)

б) дополнительная литература:

1. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие / А. Б. Васильева [и др.]. - М. : "Физматлит", 2003. - 432с. : ил., рис. - (Учебники для вузов. Специальная литература). http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2358 (дата последнего обращения: 09.10.2017)
2. Зон, Б. А. Лекции по интегральным уравнениям [Текст] : учеб. пособие для вузов / Б. А. Зон. - М. : Высшая школа, 2004. - 90 с
3. Цлаф, Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения [Текст] : справочное руководство / Л. Я. Цлаф. - 3-е изд., стер. - М. : Лань, 2005. - 191 с. : рис. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - Библиогр.: с. 181-184.
4. Волков, Владимир Тарасович. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Методы решения задач [Текст] : учебник для вузов / В. Т. Волков, А. Г. Ягола ; Московский гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, Физический факультет. - М. : КДУ, 2007. - 138 с.
5. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения :учебник для вузов /А. Б. Васильева, Н. А. Тихонов .- 2-е изд. - М. :ФИЗМАТЛИТ ,2004 .- 159 с.
6. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. М.: Изд. МГУ, 1989.

7. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. М.: Наука, 1980.

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (далее - сеть «Интернет»), необходимых для освоения дисциплины (модуля)

1. Некоммерческое свободно распространяемое программное обеспечение - МАХ-ИМА (<http://maxima.sourceforge.net>) (дата последнего обращения: 09.10.2017)
2. Некоммерческое свободно распространяемое программное обеспечение - Advanced Grapher (<http://www.alentum.com/agraper/>) (дата последнего обращения: 09.10.2017).

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию, давать оценку конкретной ситуации. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных и индивидуальных заданий, написание курсовых и выпускных квалификационных работ. При этом самостоятельная работа студентов играет решающую роль в ходе всего учебного процесса.

9.1. Советы по планированию и организации времени, необходимого для изучения дисциплины.

Рекомендуется следующим образом организовать время, необходимое для изучения дисциплины:

- Изучение конспекта лекции в тот же день после лекции – 10-15 минут.
- Изучение конспекта за день перед следующей лекцией – 15-20 минут.
- Изучение теоретического материала по учебнику и конспекту – 1-1,5 часа в неделю.
- Подготовка к практическому занятию – 1-1,5 часа.
- Всего в неделю – около 2,5-3 часа.

9.2. Описание последовательности действий студента («сценарий изучения дисциплины»).

Для понимания материала и качественного его усвоения рекомендуется такая последовательность действий:

1. После прослушивания лекции и окончания учебных занятий, при подготовке к занятиям следующего дня нужно сначала просмотреть и обдумать текст лекции, прослушанной сегодня, разобрать рассмотренные примеры.
2. При подготовке к лекции следующего дня нужно просмотреть текст предыдущей лекции, подумать о том, какая может быть тема следующей лекции.
3. В течение недели выбрать время для работы с литературой по математической экономике в библиотеке и для решения задач.
4. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия и формулы по теме домашнего задания, изучить примеры. Решая упражнение или задачу, – предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить 1-2 аналогичные задачи.

9.3. Рекомендации по использованию материалов учебно-методического комплекса.

Рекомендуется использовать методические указания и материалы по курсу, текст лекций, а также электронные пособия, имеющиеся на факультетском сервере.

9.4. Рекомендации по работе с литературой.

Теоретический материал курса становится более понятным, когда дополнительно к прослушиванию лекций изучаются и книги по теории групп. Литературу по курсу желательно изучать в библиотеке. Полезно использовать несколько учебников, однако легче освоить курс, придерживаясь одного учебника и конспекта. Рекомендуется, кроме «заучивания» материала, добиться понимания изучаемой темы дисциплины. С этой целью после прочтения очередной главы желательно выполнить несколько простых упражнений на соответствующую тему. Кроме того, очень полезно мысленно задать себе и попробовать ответить на следующие вопросы: о чем эта глава, какие новые понятия в ней введены, каков их смысл.

9.5. Советы по подготовке к экзамену.

Дополнительно к изучению конспектов лекций необходимо пользоваться учебниками по теории групп. Вместо «заучивания» материала важно добиться понимания изучаемых тем дисциплины. При подготовке к экзамену нужно освоить теорию: разобрать определения всех понятий, рассмотреть примеры и самостоятельно решить несколько типовых задач из каждой темы. При решении задач всегда необходимо комментировать свои действия и не забывать о содержательной интерпретации.

9.6. Указания по выполнению домашних и индивидуальных заданий.

При выполнении домашних и индивидуальных заданий необходимо сначала прочитать теорию и изучить примеры по каждой теме. Решая конкретную задачу, предварительно следует понять, что требуется от Вас в данном случае, какой теоретический материал нужно использовать, наметить общую схему решения. Если Вы решали задачу «по образцу» рассмотренного на аудиторном занятии или в методическом пособии примера, то желательно после этого обдумать процесс решения и попробовать решить аналогичную задачу самостоятельно.

10. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационных справочных систем

1. Лекции с применением мультимедийных материалов, мультимедийная аудитория;
2. Компьютерный класс с возможностью подключения к сети "Интернет" для доступа к ресурсам п.8.

Технологии, используемые при активной и интерактивной формах обучения	
Неимитационные	Имитационные
Активные (проблемные) лекции и семинары	Кейс-технологии
Тематическая дискуссия (пресс-конференции)	Анализ конкретных ситуаций
Мозговая атака	Групповой тренинг
Презентация	

11. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

При освоении дисциплины необходимы учебные аудитории для проведения лекционных и практических занятий, мультимедийное оборудование, программное обес-

печение для компьютерных презентаций, доступ студентов к компьютеру с выходом в Интернет.

12. Иные сведения и материалы

Актуальность и значимость курса. Кроме того, что интегральные уравнения естественным образом появляются в различных разделах физики, и требуются навыки их решения, понимание теоретической физики микромира требует владением понятиями функционального анализа, которые появляются в математике при исследовании решений интегральных уравнений. К тому же при построении физических теорий широко используется так называемый «Принцип наименьшего действия», математическим языком которого является вариационное исчисление. Поэтому данный курс является основой для большинства курсов «Теоретической физики» и соответствующей курсов специальной подготовки.

Цель и задачи изучения курса. Важнейшая цель данного курса, развитие логического мышления на примере обобщения понятия трехмерных линейных пространств на случай пространств произвольного числа измерений, овладение приемами работы с абстрактными величинами. Задачи курса, овладение математикой, необходимой для понимания основ курса «Теоретическая физика».

Раздел 12.1. РП: Особенности реализации дисциплины для лиц с ограниченными возможностями здоровья

В процессе изучения дисциплины и осуществления процедур текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптированные формы обучения с учётом индивидуальных психофизиологических особенностей. При определении форм проведения занятий с обучающимися-инвалидами учитываются рекомендации данные по результатам медико-социальной экспертизы, содержащиеся в индивидуальной программе реабилитации инвалида, относительно рекомендованных условий и видов труда.

При необходимости обучающиеся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья пользуются специальными рабочими местами, созданными с учётом нарушенных функций и ограничений жизнедеятельности.

Для лиц с нарушением зрения (слепых и слабовидящих):

- специализированное стационарное рабочее место ЭлСИС 201;
- специализированное стационарное рабочее место ЭлСИС 221;
- специализированное мобильное место ЭлНОТ 301;
- принтер Брайля (+ПО для трансляции текста в шрифт Брайля).

Для лиц с нарушением слуха:

- система информационная для слабослышащих стационарная «Исток» С-1И;
- беспроводная звукозаписывающая аппаратура коллективного пользования: радиокласс (радиомикрофон) «Сонет-РСМ» РМ-3.1.

Для лиц с нарушением опорно-двигательного аппарата:

- компьютерный стол для лиц с нарушениями опорнодвигательной системы с электроприводом;
- клавиатура с накладной и с кнопочной мышкой с расположением кнопок сверху Аккорд;
- беспроводная мышь трекбол для ПК Logitech M570;
- клавиатура с джойстиком для выбора клавиши на цветовом поле.

Особенности процесса изучения дисциплины и осуществления процедур текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации:

Для лиц с нарушением зрения задания и инструкции по их выполнению предоставляются с укрупненным шрифтом, для слепых задания оформляются рельефно-точечным шрифтом Брайля или в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением для слепых, либо зачитываются им. При необходимости обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс, предоставляется увеличивающее устройство, а также возможность использовать собственное увеличивающее устройство.

Для лиц с нарушением слуха дидактический материал (слайд-презентации лекций, задания и инструкции к их выполнению) предоставляются в письменной форме или электронном виде при необходимости. Обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости студентам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования.

Для лиц с тяжелыми нарушениями речи текущий и промежуточный контроль проводятся в письменной форме.

При необходимости лицу с ограниченными возможностями здоровья предоставляется дополнительное время для выполнения заданий и сдачи экзамена, но не более чем на 0.5 часа.

Студенты с ограниченными возможностями здоровья сдают экзамен в одной аудитории совместно с иными обучающимися, если это не создает трудностей для студентов при сдаче экзамена.

Студенты с ограниченными возможностями здоровья могут в процессе обучения и прохождения текущего и итогового контроля пользоваться техническими средствами, необходимыми им в связи с их индивидуальными особенностями.

Допускается присутствие в аудитории во время сдачи экзамена ассистента из числа работников КемГУ или привлечённых лиц, оказывающих студентам с ограниченными возможностями здоровья необходимую техническую помощь с учётом их индивидуальных особенностей (занять рабочее место, передвигаться, прочитать и оформить задание, общаться с преподавателями).

Особые условия предоставляются студентам с ограниченными возможностями здоровья на основании заявления, содержащего сведения о необходимости создания соответствующих специальных условий.

Автор: Кравченко Н.Г. (доцент кафедры теоретической физики, к.ф.-м.н.)