

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»
Институт фундаментальных наук

«УТВЕРЖДАЮ» Директор института



Гудов А.М.

2017 г.

Программа государственного экзамена

Направление подготовки

01.03.02 Прикладная математика и информатика

(шифр, название специальности/ направления подготовки)

Направленность (профиль) подготовки

Исследование операций и системный анализ

Уровень бакалавриата

Квалификация выпускника

Бакалавр

Кемерово 2017

1. Общие положения

Целью Государственного экзамена по математике и информатике для направления 01.03.02 **Прикладная математика и информатика** является определение теоретической и практической подготовленности специалиста к выполнению профессиональных задач, установленных ФГОС ВО, то есть комплексная оценка освоения компетенций, полученных за период обучения знаний, умений и навыков в области математики и информатики, информационных технологий и систем, особенностей разработки и эксплуатации математического обеспечения, с учетом специфики учебного процесса и региональных особенностей высшего учебного заведения.

Государственный экзамен состоит из двух частей:

- письменная работа по математике;
- лабораторная работа по информатике, выполняемая в компьютерном классе.

Регламент государственного экзамена:

1. Время проведения экзамена: 4 часа
2. Место проведения экзамена:
 - теоретическая часть – аудитория;
 - практическая часть – компьютерный класс (лабораторная работа).
3. Иметь с собой: на письменный экзамен – шариковую или капиллярную ручку с пастой темного цвета, две чистых ученических тетради (12 листов) со светлой обложкой (чистовик и черновик); на экзамен по компьютерным наукам или информатики - шариковую или капиллярную ручку, чистые листы бумаги (черновик).
4. На обложках тетрадей указывается фамилия и инициалы студента, номер группы, номер экзаменационного билета, «чистовик» или «черновик». В верхней части чистых листов указывается номер экзаменационного билета.
5. Экзаменационный билет (по математике) содержит три задачи (время выполнения работы 1 час 30 минут). Решенные задачи оформляются в чистовике, для работы над решением задачи служит черновик. При недостатке времени на переписывание задачи в чистовик там указывается точное место в черновике, где содержится решение задачи. За окончательный вариант принимается тот, который находится в чистовике.
6. Экзаменационный билет (лабораторная работа) содержит две задачи. Время выполнения работы 2 часа 30 минут.
7. Решение задач реализуется на компьютере. Результаты реализации оформляются следующим образом:
 - по 1-й задаче в специальной папке сохраняются исходный текст программы и выполняемый модуль;
 - по 2-й задаче результирующий файл в соответствующем формате.Файлы записываются в специальном каталоге, который назначается случайнym образом студенту перед началом лабораторной работы.
8. На экзамен не допускаются студенты в верхней одежде, с продуктами питания. Разрешается принести с собой пластиковую бутылку с водой.
9. Запрещено во время экзамена пользоваться учебниками, конспектами, другой литературой, а также техническими средствами связи.
10. Комиссия проверяет и оценивает работы по математике и по информатике. Общая оценка по каждой работе выставляется комиссией по сумме баллов. Общая оценка по экзамену выставляется всеми членами комиссии.
11. Апелляция проводится после проверки результатов экзамена на основании поданного на имя председателя комиссии заявления.

2. Перечень вопросов, выносимых на государственный экзамен

Междисциплинарный государственный экзамен по математике и информатике включает в себя следующие дисциплины:

Математика письменно:

- математический анализ;
- комплексный анализ;
- алгебра и геометрия;
- дифференциальные уравнения;
- уравнения математической физики;
- теория вероятностей и математическая статистика;
- дискретная математика;
- методы оптимизации.

Информатика:

- основы информатики;
- базы данных;
- языки и методы программирования;
- численные методы.

ПРОГРАММА МЕЖДИСЦИПЛИНАРНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

2.1. МАТЕМАТИКА ПИСЬМЕННО

2.1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1.1.1. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ.

1. Вычисление предела последовательности: 47, 48, 50, 51.
2. Предел монотонной последовательности: 58, 59, 65.

2.1.1.2. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

1. Нахождение предела функции: 427, 442, 517, 526, 541.
2. Порядок малости и порядок роста функции: 650, 653.
3. Непрерывность и точки разрыва: 700, 734, 736, 740.

2.1.1.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

1. Нахождение производной сложной функции: 933, 960.3, 963.
2. Дифференциал, приближенные вычисления: 1090, 1099, 1100, 1105.
3. Раскрытие неопределенностей: 1336, 1338, 1341.
4. Формула Тейлора: 1380, 1394, 1401.
5. Исследование функций: 1481, 1499, 1517, 1531, 1541.

2.1.1.4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

1. Вычисление интеграла: 1777, 1799, 1791, 1868, 1930.

2.1.1.5. ИНТЕГРАЛ РИМАНА.

1. Вычисление определенного интеграла: 2211, 2212, 2214.
2. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле: 2248, 2251.
3. Приложения интеграла: 2419, 2431, 2442, 2473, 2401, 2414, 2426, 2462, 2489.

2.1.1.6. ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФМП).

1. Предел, непрерывность: 3183.1, 3203.2, 3206.

2.1.1.7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФМП.

1. Дифференцируемость: 3251, 3290, 3305, 3323, 3345.
2. Формула Тейлора: 3582, 3589.
3. Дифференцирование неявных функций: 3403.1, 3407.
4. Исследование на экстремум: 3644, 3645, 3653.

Исследование на условный экстремум: 3662, 3664.

5. Нахождение наибольших, наименьших значений функции: 3678.

2.1.1.8. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

1. Исследование сходимости положительных рядов: 2576, 2589.1, 2589.2, 2619.

2. Исследование абсолютной и условной сходимости: 2683, 2698.1.

2.1.1.9. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ.

1. Исследование равномерной сходимости ФП: 2747, 2748, 2751.

2. Нахождение области сходимости ФР: 2721, 2717.

3. Равномерная сходимость ФР и свойства суммы: 2792, 2797.

2.1.1.10. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ.

1. Нахождение радиуса сходимости, области сходимости: 2821, 2813.

2. Разложение функции в степенной ряд: 2873(а,б), 2888.

Задачи из задачника:

Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 624 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/92629>.

2.1.2. АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

2.1.2.1. АЛГЕБРА

1. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Правило Крамера. Теорема Кронекера-Капелли. Фундаментальная система решений.

Задачи [1]: 716, 717, 718, 725, 824.

2. Определитель матрицы. Определитель с углом нулей. Разложение определителя. Определитель произведения матриц. Критерий равенства определителя нулю. Обратная матрица. Определитель Вандермонда.

Задачи [1]: 284, 316, 345, 468, 865.

3. Многочлены. Деление с остатком. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида. Корни многочлена. Кратные корни.

Задачи [2]: 577, 580, 650.

4. Векторные пространства и линейные операторы. Базис и размерность векторного пространства. Подпространство, сумма подпространств, размерность суммы. Матрица линейного оператора. Собственные векторы и собственные значения. Диагонализируемость.

Задачи [1]: 1280, 1321, 1454, 1458, 1467, 1480.

5. Евклидовы пространства. Ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации. Неравенства треугольника и Коши-Буняковского. Симметрические операторы. Ортогональные операторы.

Задачи [1]: 1363, 1371, 1586.

6. Квадратичные формы. Алгоритм Лагранжа. Положительная определенность, критерий Сильвестра. Приведение к главным осям.

Задачи [1]: 1183, 1191, 1214, 1254.

Задачи из задачников:

[1] Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 480 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/529>.

[2] Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре [Электронный ресурс] : учеб. / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 288 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/399>.

2.1.2.2. ГЕОМЕТРИЯ

1. Скалярное, векторное и смешанное произведение. Аффинная и декартова системы координат. Уравнения линий и поверхностей.

2. Прямая линия на плоскости: общее уравнение прямой, параметрическое и каноническое уравнения, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой, проходящей

через данную точку перпендикулярно данному вектору уравнение. Расстояние от точки до прямой, угол между двумя прямыми.

3. Плоскость и прямая в пространстве: общее и параметрическое уравнение плоскости, уравнение плоскости, проходящей через данную точку ортогонально данному вектору. Расстояние от точки до плоскости, угол между плоскостями.
4. Общее и параметрическое уравнение прямой в пространстве, канонические уравнения прямой, расстояние от точки до прямой, расстояние между скрещенными прямыми, угол между прямой и плоскостью, взаимное расположение двух прямых и прямой и плоскости.

2.1.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной. Задача Коши.
2. Теорема существования и единственности решения задач Коши для уравнения первого порядка.
3. Линейные системы дифференциальных уравнений первого порядка. Основные теоремы.
4. Построение общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом вариации произвольных постоянных.
5. Линейные системы с постоянными коэффициентами.
6. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.
7. Поведение траекторий систем двух уравнений на плоскости в окрестности точек покоя, точки покоя (типа узел, седло, фокус, центр).

2.1.4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. Классическое определение вероятности.
2. Теоремы сложения и умножения. Условная вероятность.
3. Схема испытаний Бернулли.
4. Случайная величина, ее функция распределения, плотность вероятностей.
5. Числовые характеристики случайной величины.
6. Закон распределения двумерной случайной величины, ее числовые характеристики.
7. Числовые характеристики функций от случайных величин, закон распределения.

2.1.5. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Отношения. Свойства отношения. Отношения эквивалентности и отношения порядка.
2. Оптимальное кодирование. Стоимость кода. Код Фано – код, близкий к оптимальному. Построение кода Фано для заданного распределения частот.
3. Элементарные преобразования формул алгебры двоичной логики. Получение совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ) и совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ) по таблице логической функции.
4. Полином Жегалкина логической функции. Линейные функции.
5. Метод Блейка-Порецкого получения сокращенной ДНФ логической функции. Тупиковая ДНФ. Таблица покрытия.

2.1.6. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП). Геометрическая интерпретация ЗЛП. Графический метод решения.
[2] 16.188 – 16.195.
 2. Условия оптимальности решения в задаче линейного программирования.
[1] 5.13; [3] 16.207, 16.211.
 3. Задача безусловной оптимизации. Необходимые и достаточные условия оптимальности решения.
[2] 1, 2; [2] 16.104, 16.105, 16.110.
 4. Задача нелинейного программирования с ограничениями. Метод множителей Лагранжа.
[2] 3(а, б), 6, 7.
- Задачи из задачников:
- [1] Ашманов, С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях [Электронный ресурс] : учеб. пособие /

- С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/3799>.
- [2] Крутиков, В. Н. Методы оптимизации: учеб. пособие / В. Н. Крутиков; Кемеровский гос. ун-т. – Кемерово, 2011. – 91 с.

2.2. ИНФОРМАТИКА

2.2.1. ОСНОВЫ ИНФОРМАТИКИ

Основные структуры данных, алгоритмы поиска и сортировки. Структуры данных: списки, очереди, стеки, множества, графы, деревья. Последовательный и бинарный поиск, поиск в двоичном дереве, устранение коллизий.

2.2.2. БАЗЫ ДАННЫХ

Элементы языка SQL. Компиляторы языка SQL. Стандартный интерфейс манипуляции с данными. Компилятор языка. Основные компоненты. Целостность по ссылкам. Общие принципы поддержания целостности данных в реляционной модели. Целостность сущностей. Первичный и внешний ключи. Типы транзакций. Два результата завершения транзакции.

2.2.3. ЯЗЫКИ И МЕТОДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Базисные типы данных в традиционных языках программирования. Правила передачи параметров. Инкапсуляция. Абстрактные типы данных. Имена в языках программирования. Описания и области действия. Правила видимости. Перекрытие имен и видимость. Процедуры, функции и модули. Организация ввода-вывода в языках программирования. Сложные структуры данных. Тип «указатель» и ссылочный тип. Реализация алгоритмов работы с динамическими структурами (списки, очереди, двоичные деревья).

2.2.4. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

1. Абсолютная и относительная погрешности.
1. Погрешность функции. Линейная оценка погрешности.
2. Интерполяционный полином Лагранжа.
3. Оценка остаточного члена интерполяционного полинома Лагранжа.
4. Обобщенные квадратурные формулы.
5. Метод простой итерации решения СЛАУ.
6. Оптимизация скорости сходимости итерационных процессов.
7. Метод простой итерации решения систем нелинейных уравнений.

3. Рекомендации обучающимся по подготовке к экзамену

Дополнительно к изучению конспектов по предметам, входящим в программу государственного экзамена, необходимо пользоваться учебниками. Вместо «заучивания» материала важно добиться понимания рассматриваемых тем дисциплин. При подготовке к экзамену нужно освоить теорию: разобрать определения всех понятий и постановки математических задач, рассмотреть примеры и самостоятельно решить несколько типовых задач из каждой темы. При решении задач всегда необходимо комментировать свои действия и не забывать о содержательной интерпретации.

3.1. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ ПО ДИСЦИПЛИНАМ

3.1.1. МАТЕМАТИКА ПИСЬМЕННО

3.1.1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2, z = 0, |x| + |y| = 1$.
2. Найти длину кривой $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ от точки $O(0,0)$ до точки $A(x(t), y(t))$.
3. Построить график функции $y = \frac{x^2}{(x-1)^3}$.

4. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0,1]$.
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y) = x(1-y)$ в области $|x| + |y| \leq 1$.
6. Найти криволинейный интеграл $\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ по кривой C : $|x| + |y| = 1$ против часовой стрелки.

3.1.1.2. АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

3.1.1.2.1. АЛГЕБРА

1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования $f: R^3 \rightarrow R^3$, заданного в стандартном базисе матрицей:

$$[f] = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}.$$

2. Найти значения параметров a и b , при которых число 1 является корнем кратности 2 для многочлена $x^3 + ax^2 + bx + 3$.
3. Найти значение параметра t , при котором векторы a , b , c линейно зависимы, и выразить вектор c через a и b : $a = (1, -1, 2)$, $b = (-2, 3, 1)$, $c = (4, -5, t)$.

3.1.1.2.2. ГЕОМЕТРИЯ

1. Через точку B , симметричную точке $A(2,9,6)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$, провести плоскость, перпендикулярную прямой AB .
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2,3)$ и точку B , симметричную точке $C(7,7,8)$ относительно плоскости $2x + 2y + 3z - 1 = 0$.
3. Прямая $x = 1 + t$, $y = 3 + 8t$, $z = 2 + 4t$ ортогонально спроектирована на плоскость $8x - 11y + 7z + 11 = 0$. Написать уравнение биссектрисы тупого угла, образованного данной прямой и ее проекцией.
4. Данна прямая $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{5}$ и точка $A(9,2,6)$. Через точку B , симметричную точке A относительно данной прямой, провести плоскость, перпендикулярную прямой AB .

3.1.1.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y'' + 3y' = e^x$.
2. Найти общее решение линейной однородной системы уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 8y - x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

3. Найти функцию Ляпунова вида $V = ax^2 + by^2$ для системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3y - 2x^3 \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 3y^3 \end{cases}$$

4. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению проверить на устойчивость тривиальное решение системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + 1 - e^{y^2} \\ \frac{dy}{dt} = 6x^2 - 3y + 2x + 3xy \end{cases}$$

3.1.1.4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. Из отрезка $[5, 10]$ наудачу выбираются n чисел. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно число не более 8.
2. Мишень состоит из центрального круга радиуса R_1 и кольца с внешним радиусом $R_2 > R_1$. По мишени произведено n выстрелов. Какова вероятность того, что в центральный круг будет не менее 2 попаданий, если промахи по мишени исключены?
3. Мишень состоит из круга радиуса R и вписанного в него квадрата. По данной мишени произведено 15 выстрелов. Полагая, что непопадание в цель исключено, найти вероятность 1) 10 попаданий в квадрат; 2) от 3 до 5 попаданий в квадрат.
4. Игровой кубик брошен n раз. Какова вероятность того, что при этом 1) в $k \leq n$ случаях появится число очков не менее 5; 2) хотя бы раз появится число очков не менее 5.

3.1.1.5. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

1. Определите свойства отношений $R_i \subseteq M \times M$ и их вид, где M – множество натуральных чисел:

R_1 – «быть меньше»; R_2 – «быть больше или равно»; R_3 – «иметь общий делитель, отличный от 1»; R_4 – «быть делителем»; R_5 – «иметь общий остаток от деления на 3». Задать эти отношения с помощью матрицы, графа, списка, если $M = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

- Какие из этих отношений являются отношениями порядка, отношениями эквивалентности?
2. Построить для следующего распределения вероятностей код Фано. Найти стоимость кода.

A	B	C	D	E	F	G	H
0,53	0,15	0,07	0,06	0,01	0,05	0,04	9

3. Упростить формулу $F(x, y, z)$ с помощью эквивалентных преобразований. Получить дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Построить таблицу (вектор-столбец). Построить СДНФ и СКНФ из вектор-столбца функции.

$$F(x, y, z) = \overline{(x\bar{y} \vee \bar{x}yz)} \cdot \overline{x \vee y}.$$

4. Привести функцию, заданную булевой формулой, к полиному Жегалкина. Проверить, обладает ли она свойством линейности.

$$f(x, y, z) = \overline{(xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y})} \cdot \overline{(\bar{x} \vee xy) \vee \bar{z}}.$$

5. Получить сокращенную ДНФ функции методом Блейка-Порецкого. Из сокращенной ДНФ получить тупиковую ДНФ с помощью таблицы покрытия.

$$f(x, y, z) = xyz \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee yz \vee \bar{x}\bar{y} \vee xz.$$

3.1.1.6. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Найти минимум функции $f(x) = x_1^2 + 0.5 x_2^2 + x_1 + 0.5 x_2 \rightarrow \min$, при ограничениях $g(x) = 0.1 x_1 + 0.9 x_2 = 1$.

2. Найти минимум функции

$$f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

при ограничениях

$$g(x) = 2x_1 + x_2 = 1. \quad (2)$$

3. Решить задачу линейного программирования графическим методом

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \quad (1)$$

при ограничениях

$$8x_1 + 3x_2 \leq 25, \quad (2)$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 19, \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (4)$$

3.1.2. ИНФОРМАТИКА

3.1.2.1. БАЗЫ ДАННЫХ

Используя учебную базу данных, получите список заказчиков и наименование заказанных ими товаров для тех заказчиков, общая сумма заказов которых превышает 100 000.

3.1.2.2. ЯЗЫКИ И МЕТОДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Написать программу, реализующую решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = \sin x \cdot \sin y$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$ методом Эйлера.

3.1.2.3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

I. Интерполярование:

Дана функция $y = f(x) \in C^3[a, b]$, $x \in [a, b]$. Узлы сетки определены следующим образом: $x_i = a + ih$, $i = 1, \dots, n$, $x_1 = a$, $x_n = b$ и $\varepsilon > 0$. Найти такой шаг сетки h , чтобы квадратичная интерполяция полиномом Гаусса в точке $x \approx (a + b)/2$ имела погрешность не больше ε .

$$f(x) = x^2 \cos(x), [a, b] = [5, 6], \varepsilon = 10^{-4}.$$

II. Численное интегрирование:

Имеется интеграл $J(f) = \int_a^b f(x) dx$, где функция $f(x) \in C^2[a, b]$. Необходимо найти такой шаг интегрирования, чтобы погрешность обобщенной квадратурной формулы трапеции не превышала заданного числа $\varepsilon > 0$.

$$J(f) = \int_{-1}^2 \sin(e^x) dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

III. Решение систем линейных алгебраических уравнений:

Пусть дана СЛАУ

$$-\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = f(x_i), i = 1, \dots, N-1, U_0 = \varphi_0, U_1 = \varphi_1,$$

φ_0, φ_1 – заданные постоянные, $f(x)$ – известная функция.

Построить явный итерационный метод с постоянным оптимальным параметром, найти этот параметр, оценить число итераций, уменьшающих начальную погрешность в ε^{-1} раз ($N = 100, \varepsilon = 10^{-3}$).

IV. Погрешность функции. Линейная оценка погрешности:

Дана функция $y = f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. Известно некоторое приближение $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ к $x \in G$, где G – многомерный параллелепипед: $|x_i - x_i^*| \leq \Delta(x_i^*)$, $i = 1, \dots, n$. Найти линейную оценку погрешности $A^0(y^*)$.

$$f(x) = e^{x_1} + \sin(x_2^2) + \ln(x_3), \quad x_1^* = 1.5, \quad x_2^* = 3, \quad x_3^* = 4.6, \quad \Delta(x_1^*) = 10^{-1}, \quad \Delta(x_2^*) = 10^{-2}, \\ \Delta(x_3^*) = 10^{-5}.$$

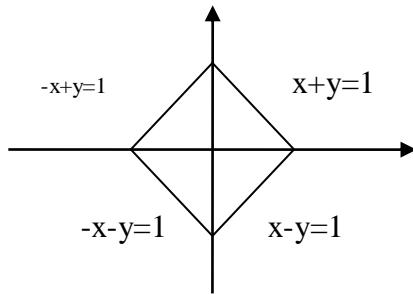
3.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

3.2.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - y^2$ в

замкнутой области $|x| + |y| \leq 1$.

Решение. Изобразим множество, на котором исследуется функция:



1. Исследуем вначале функцию на множестве $|x| + |y| < 1$.

Найдем стационарные точки исследуемой функции, принадлежащие рассматриваемой области. Имеем:

$$f'_x(x, y) = 2x = 0, \quad f'_y(x, y) = -2y = 0.$$

Точка $x = 0, y = 0$ принадлежит рассматриваемой области. Так как

$$f''_{xx}(x, y) = 2, \quad f''_{yy}(x, y) = -2, \quad f''_{xy}(x, y) = 0,$$

то квадратичная форма $d^2f(0,0) = 2(dx)^2 - 2(dy)^2$ неопределенна, так как при $dx = 2dy$ $d^2f(0,0) > 0$, а при $dy = 2dx$ $d^2f(0,0) < 0$ и, следовательно, в этой точке экстремума нет.

2. Исследуем поведение функции на границе рассматриваемой области, то есть на множестве $|x| + |y| = 1$.

2.1. При $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, y = -x + 1$ имеем:

$$f(x, -x + 1) = x^2 - (-x + 1)^2 = 2x - 1.$$

Наибольшее значение этой функции достигается при $x = 1$ и равно 1.

Наименьшее – при $x = 0$ и равно –1.

2.2. При $-1 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, y = x + 1$

$$f(x, x + 1) = x^2 - (x + 1)^2 = -2x - 1.$$

Наибольшее значение этой функции достигается при $x = -1$ и равно 1.

Наименьшее – при $x = 0$ и равно –1.

2.3. При $-1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0, y = -x - 1$

$$f(x, -x - 1) = x^2 - (-x - 1)^2 = -2x - 1.$$

Наибольшее значение этой функции достигается при $x = -1$ и равно 1.

Наименьшее – при $x = 0$ и равно –1.

2.4. При $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0, y = x - 1$

$$f(x, x - 1) = x^2 - (x - 1)^2 = 2x - 1.$$

Наибольшее значение этой функции достигается при $x = 1$ и равно 1.

Наименьшее – при $x = 0$ и равно –1.

Таким образом, наибольшее значение, равное 1, исходная функция достигает в точках $(0,1)$ и $(0,-1)$, а наименьшее значение, равное –1, – в точках $(1,0)$ и $(-1,0)$.

Ответ. Наименьшее значение –1. Наибольшее значение 1.

Пример 2. Построить график функции $y = f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$.

Решение. Построение проведем, следуя схеме построения графиков функций.

1) Область определения $D(y) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2) Функция ни нечетная, ни четная.

3) Нули функции:

$$y = 0 \text{ при } x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

Так как квадратное уравнение $x^2 + x + 1 = 0$ действительных корней не имеет (дискриминант $D = 1 - 4 = -3 < 0$), то $y = 0$ при $x = 1$.

При $x = 0$, $y = -1$.

4) Асимптоты графика функции.

4.1) Вертикальные асимптоты.

$$\text{Так как } \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = +\infty,$$

то прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота.

4.2) Наклонные асимптоты $y = kx + b$.

Так как

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 1}{x(x^3 + 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^3}} = 1,$$

то прямая $y = 1$ является асимптотой к графику функции как при $x \rightarrow +\infty$, так и при $x \rightarrow -\infty$.

5) Исследование на монотонность и экстремум.

Производная функции имеет вид

$$y' = f'(x) = \frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}.$$

при $x = 0$. При этом производная $f'(x) = \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2} > 0$ при

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, -1) \cup (-1, +\infty)$ и, следовательно, точка $x = 0$ не является точкой экстремума функции, и функция строго возрастает как на интервале $(-\infty, -1)$, так и на интервале $(1, +\infty)$.

6) Исследование на выпуклость. Точки перегиба.

Вторая производная функции имеет вид

$$\begin{aligned} y'' = f''(x) &= \frac{12x(x^3 + 1)^2 - 6x^2 \cdot 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^4} = \\ &= \frac{12x(x^3 + 1)((x^3 + 1) - 3x^3)}{(x^3 + 1)^4} = \frac{12x(1 - 2x^3)}{(x^3 + 1)^3}. \end{aligned}$$

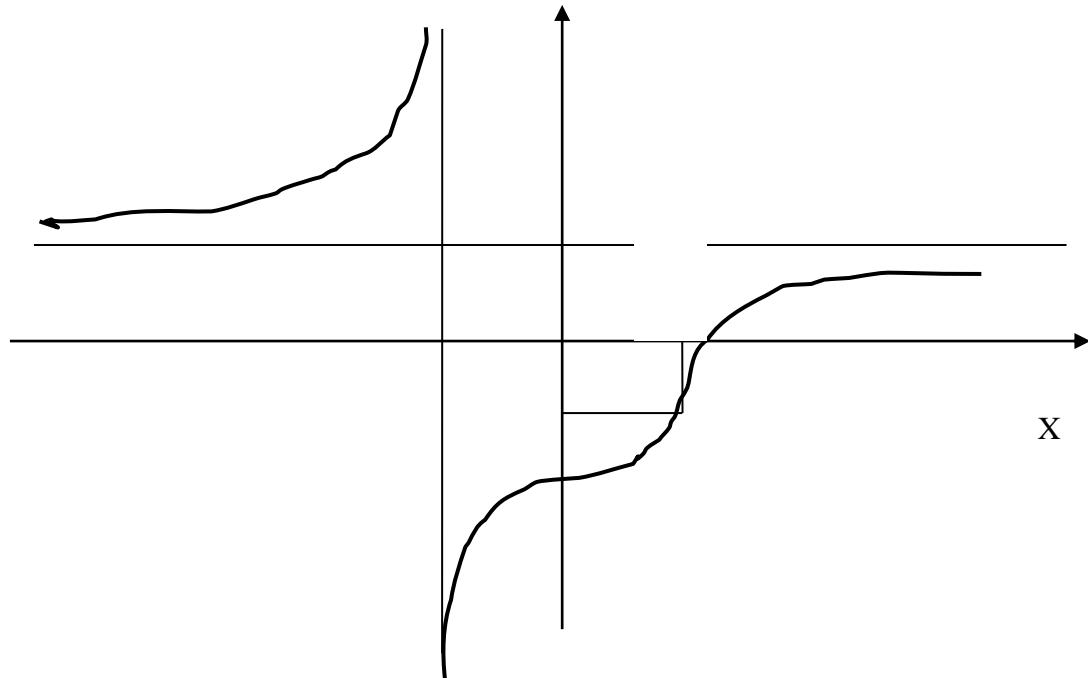
Результаты исследования второй производной удобно свести в таблицу

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$x = 0$	$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$
$\operatorname{sgn} y''$	+	-	0	+	0	-
Фун	Выпук	Вып		Вып		Выпукл

кция	ла вниз	ука ввер х		кла вниз		а вверх
------	------------	------------------	--	-------------	--	------------

Таким образом, точки $x=0$ и $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ – точки перегиба графика функции.

7) Построение графика



Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0, 1]$.

Решение. Найдем предельную функцию $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [0, 1]$. В нашем случае имеем: $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (x^n - x^{2n}) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$. Последовательность $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[0, 1]$ при $n \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Найдем $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - x^{2n}|$. Имеем: $\sup_{x \in [0, 1]} |x^n - x^{2n}| = \max_{x \in [0, 1]} (x^n - x^{2n})$, так как функция $\varphi_n(x) = (x^n - x^{2n}) \geq 0$ и непрерывна на $[0, 1]$.

Так как $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n(1) = 0$, то найдем максимальное значение функции на $(0, 1)$.

Найдем экстремальные точки, принадлежащие $(0, 1)$. Имеем: $\varphi'_n(x) = (nx^{n-1} - 2nx^{2n-1}) = nx^{n-1}(1 - 2x^n) = 0$. Стационарная точка, принадлежащая $(0, 1)$, удовлетворяет уравнению $1 - 2x^n = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$. Это – точка максимума, так как производная меняет знак с «+» на «-» в окрестности этой точки. Отсюда $\max_{x \in [0, 1]} (x^n - x^{2n}) = \varphi_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in [0, 1]} |x^n - x^{2n}| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq 0.$$

Ответ. Последовательность $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ сходится к $f(x) \equiv 0$ на $[0,1]$ неравномерно.

3.2.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пример 1. Найти все положения равновесия системы

$$\begin{cases} x' = -2x + y + x^3 \\ y' = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

и исследовать их на устойчивость.

Решение. Положения равновесия данной системы уравнений определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} -2x + y + x^3 = 0, \\ -x - 2y + 3x^5 = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим три положения равновесия: $(0,0), (1,1), (-1,-1)$.

Исследуем вопрос устойчивости каждого из них, для этого вычислим коэффициенты линеаризованной системы по формуле:

$$a_{11} = \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x}, a_{12} = \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y}, a_{21} = \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x}, a_{22} = \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y},$$

где f_i – правые части системы, а (x_0, y_0) – положение равновесия.

Для исходной системы получим:

$$\frac{\partial f_1(x, y)}{\partial x} = -2 + 3x^2, \frac{\partial f_1(x, y)}{\partial y} = 1, \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial x} = -1 + 15x^4, \frac{\partial f_2(x, y)}{\partial y} = -2.$$

Система первого приближения для положения равновесия $(0,0)$ имеет вид:

$$\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = -x - 2y. \end{cases}$$

Соответственно, характеристическое уравнение для данной системы записывается в виде:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. Так как комплексные корни характеристического уравнения имеют отрицательную вещественную часть $\operatorname{Re} \lambda < 0$, то по теореме о первом приближении положение равновесия $(0,0)$ асимптотически устойчиво.

Линеаризованная система для положения равновесия $(1,1)$ имеет вид

$$\begin{cases} x' = (x-1) + (y-1) = x + y - 2, \\ y' = 14(x-1) - 2(y-1) = 14x - 2y - 16. \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0,$$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$ действительные и разных знаков. По теореме о первом приближении

положение равновесия $(1,1)$ является неустойчивым.

Линеаризованная система для положения равновесия $(-1,-1)$ имеет вид:

$$\begin{cases} x' = (x+1) + (y+1) = x + y + 2, \\ y' = 14(x+1) - 2(y+1) = 14x - 2y - 12. \end{cases}$$

Корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 14 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 16 = 0,$$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$ действительные и разных знаков. По теореме о первом приближении положение равновесия $(-1, -1)$ является неустойчивым.

Ответ. Положение равновесия $(0, 0)$ асимптотически устойчиво.

Положение равновесия $(1, 1)$ является неустойчивым.

Положение равновесия $(-1, -1)$ является неустойчивым.

3.2.3. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Пример 1. Из полной колоды карт (52 карты) вынимают наудачу 3 карты. Необходимо найти вероятность того, что среди вынутых карт будет точно один туз.

Решение. Пусть A – случайное событие, заключающееся в том, что среди вынутых трех карт имеется точно 1 туз. Так как исходами эксперимента являются появления трех карт из 3 карт из 52 можно извлечь C_{52}^3 различными способами, то пространство Ω состоит из C_{52}^3 элементарных событий. Очевидно, что все элементарные события равновозможные. Появлению события A благоприятствуют такие исходы, когда среди трех вынутых карт имеется 1 туз, а две другие карты произвольны. Один туз из четырех можно извлечь C_4^1 различными способами. Две карты (не тузы) из 48 можно извлечь C_{48}^2 различными способами. Тогда событию A благоприятствуют $C_4^1 C_{48}^2$ элементарных событий. Следовательно, по классическому определению вероятности

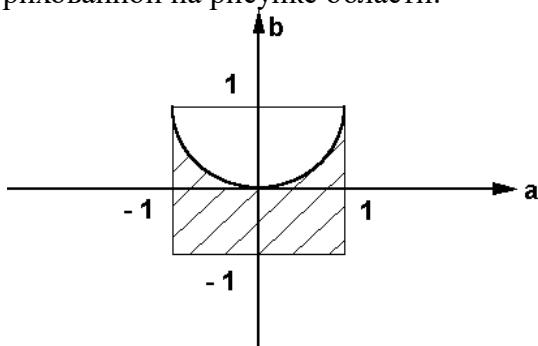
$$p(A) = \frac{C_4^1 C_{48}^2}{C_{52}^3} \approx 0,24.$$

Пример 2. Определить вероятность того, что корни квадратного уравнения $x^2 + ax + b = 0$ вещественны, если значения коэффициентов a, b равновозможны в квадрате $|a| \leq 1, |b| \leq 1$.

Решение. Пусть A – случайное событие, состоящее в том, что корни уравнения вещественны. Очевидно, равновозможными элементарными событиями являются точки квадрата $|a| \leq 1, |b| \leq 1$. Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ \frac{x^2}{R^2} & , \quad 0 < x \leq R \\ 1 & , \quad x > R \end{cases}$$

Корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$ вещественны, если $a^2 - b \geq 0$. Тогда событие A состоит из точек заштрихованной на рисунке области.



Легко найти, что

$$\mu(A) = 2 + \int_{-1}^1 a^2 da = \frac{8}{3}.$$

Согласно геометрическому определению вероятности,

$$p(A) = \frac{8}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3}.$$

Пример 3. В партии, состоящей из N однотипных изделий, имеется M дефектных. Из партии выбираются для контроля n изделий. Если среди контрольных деталей окажется более чем m дефектных, то бракуется вся партия. Найти вероятность того, что партия изделий будет забракована.

Решение. Событие A – партия изделий забракована. Событие A_i – среди контрольных изделий имеется i дефектных. Очевидно,

$$A = \bigcup_{i=m+1}^n A_i, \quad A_i A_j = \emptyset, i \neq j.$$

Тогда

$$p(A) = \sum_{i=m+1}^n p(A_i).$$

Согласно классического определения вероятности,

$$p(A_i) = \frac{C_M^i C_{N-M}^{n-i}}{C_N^n}.$$

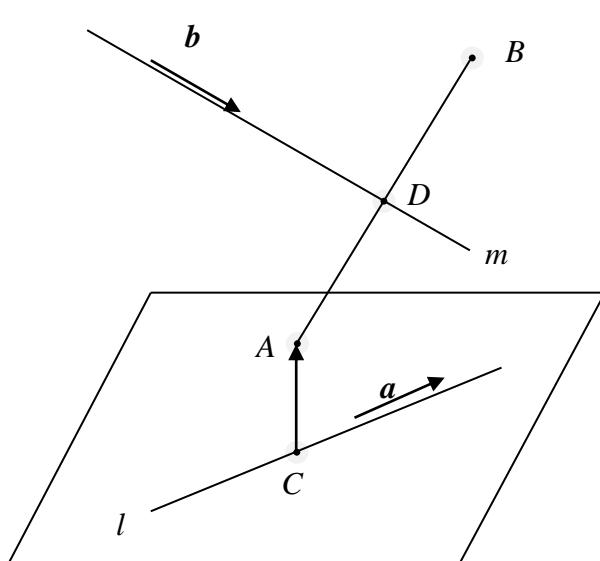
Следовательно,

$$p(A) = \frac{1}{C_N^n} \sum_{i=m+1}^n C_M^i C_{N-M}^{n-i}.$$

3.2.4. ГЕОМЕТРИЯ

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-3}$ и

через точку A , симметричную точке с координатами $(1,1,1)$ относительно прямой $x=1+t, y=1+t, z=-2-2t$.



уравнение

$$d_1 + d_2 - 2d_3 = 0.$$

Решение: Обозначим через l первую из данных прямых, а через m – вторую. Обозначим через B данную точку. Обозначим через D ортогональную проекцию точки B на прямую m , а через (d_1, d_2, d_3) – координаты точки D . Тогда вектор \overline{DB} имеет координаты $(1-d_1, 1-d_2, 1-d_3)$ и этот вектор перпендикулярен прямой m . Обозначим через b вектор с координатами $(1, 1, -2)$, который параллелен прямой m . Тогда векторы \overline{DB} и b перпендикулярны и поэтому их скалярное произведение равно 0. Вычисляя это скалярное произведение в координатах, получаем следующее

1)
1)

Поскольку точка D лежит на прямой m , то ее координаты удовлетворяют уравнениям этой прямой, и, значит, существует число t_1 , такое, что

$$d_1 = 1 + t_1, \quad d_2 = 1 + t_1, \quad d_3 = -2 - 2t_1.$$

1

Решая совместно систему уравнений (1) и (2), получаем $t_1 = -1$, $d_1 = d_2 = d_3 = 0$. Таким образом, точка D имеет координаты $(0, 0, 0)$ и, значит, вектор \overline{DB} имеет координаты $(1, 1, 1)$. По определению симметричной точки вектор $\overline{DA} = -\overline{DB}$, и поэтому координаты вектора \overline{DA} есть $(-1, -1, -1)$. Прибавляя к координатам точки D координаты вектора \overline{DA} , получаем, что координаты точки A есть $(-1, -1, -1)$. Обозначим через C точку с координатами $(-1, -2, 0)$, лежащую на прямой l . Тогда вектор \overline{CA} имеет координаты $(0, 1, -1)$. Обозначим через a вектор с координатами $(1, 2, -3)$, который параллелен прямой l . Искомая плоскость проходит через точку C параллельно векторам \overline{CA} и a , и поэтому ее уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+2 & z \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, получаем уравнение $x + y + z + 3 = 0$ искомой плоскости.

Пример 2. Найти точки на прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$, находящиеся на расстоянии 3 от плоскости $2x + 2y + z - 14 = 0$.

Решение: Обозначим через l данную прямую, а через π – данную плоскость. Перепишем уравнения прямой l в параметрическом виде: $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - t$. Расстояние d от произвольной точки с координатами (x, y, z) до плоскости π определяется по формуле

$$d = \frac{|2x + 2y + z - 14|}{3}.$$

Параметрические уравнения прямой l дают нам координаты произвольной точки прямой l . Подставляя эти уравнения в формулу для определения расстояния и приравнивая полученное выражение к 3, получаем уравнение $|t - 3| = 3$ для нахождения значений параметра t , соответствующих искомым точкам. Решая полученное уравнение, получаем: $t_1 = 0$, $t_2 = 6$. Подставляя эти значения в параметрические уравнения прямой l , находим координаты $(1, 1, 1)$ и $(7, 7, -5)$ искомых точек.

3.2.5. АЛГЕБРА

Пример 1. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования

в \mathbb{R}^3 , заданного в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$.

Решение: Находим характеристический многочлен:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 3 & 3 \\ -1 & 8 - \lambda & 6 \\ 2 & -14 & -10 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(8 - \lambda)(-10 - \lambda) + 3 \cdot 6 \cdot 2 + (-1) \cdot (-14) \cdot 3 - 2 \cdot (8 - \lambda) \cdot 3 - (-1) \cdot 3 \cdot (-10 - \lambda) - (-14) \cdot 6 \cdot (-\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda + 1)^2.$$

Собственными значениями будут корни этого многочлена: $\lambda = 0$ и $\lambda = -1$.

Для нахождения соответствующих собственных векторов подставим найденные λ в уравнение $A[x] = \lambda[x]$ или $(A - \lambda E)[x] = 0$.

Для $\lambda = 0$ будем иметь:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 8x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 - 14x_2 - 10x_3 = 0 \end{array}$$

Тогда $x_2 = -x_3$, $x_1 = 8x_2 + 6x_3 = -8x_3 + 6x_3 = -2x_3$, а значит собственным будет вектор $(-2; -1; 1)$.

Для $\lambda = -1$ получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \\ 2x_1 - 14x_2 - 9x_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}$$

Тогда $x_2 = -3x_3/4$, $x_1 = -3x_2 - 3x_3 = 9x_3/4 - 3x_3 = -3x_3/4$, поэтому собственным будет вектор $(-3; -3; 4)$.

Ответ: собственному значению $\lambda = 0$ соответствует собственный вектор $(-2; -1; 1)$, собственному значению $\lambda = -1$ соответствует собственный вектор $(-3; -3; 4)$ /

Пример 2. Найти значения параметров a и b , при которых число 1 является корнем кратности 2 для многочлена $x^3 + ax^2 + bx + 3$.

Решение. Число c является корнем кратности 2 для многочлена $f(x)$, если выполняются условия: $f(c) = 0$, $f'(c) = 0$, $f''(c) \neq 0$. Имеем:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b,$$

$$f''(x) = 6x + 2a.$$

$$\text{При } c = 1, \text{ получаем систему} \quad \begin{cases} f(1) = a + b + 4 = 0, \\ f'(1) = 2a + b + 3 = 0, \\ f''(1) = 2a + b \neq 0. \end{cases}$$

Отсюда $a = 1$, $b = -5$.

Ответ.

$$a = 1, \quad b = -5.$$

3.2.6. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Пример 1. Упростить формулу $F(x, y, z)$ с помощью эквивалентных преобразований.

Получить дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ). Построить таблицу (вектор-столбец). Построить СДНФ и СКНФ из вектор-столбца функции.

$$F(x, y, z) = \overline{(x\bar{y} \vee \bar{x}yz)} \cdot \overline{x \vee y}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \overline{(x\bar{y} \vee \bar{x}yz)} \cdot \overline{x \vee y} = \overline{x\bar{y}} \cdot \overline{\bar{x}yz} \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} = (\bar{x} \vee y) \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot \overline{x\bar{y}} = \\ &= (\overline{x}\bar{y} \vee y\bar{x}) \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \overline{x\bar{y}} \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) = \overline{x\bar{y}} \vee \overline{x\bar{y}\bar{z}} = \overline{x\bar{y}}. \end{aligned}$$

Здесь был применен закон де Моргана, затем закон дистрибутивности, уничтожения кратности, противоречия. Последним, был применен закон поглощения.

Построим таблицу функции. В левой части перечислим все значения аргументов, в правой – соответствующие значения функции.

x	y	z	$F(x, y, z) = \overline{x\bar{y}}$
0	0	0	1

0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Воспользуемся правилом получения совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ) из вектор-столбца:

1. Выбрать все единичные наборы значений аргументов.

2. Каждому единичному набору поставить в соответствие элементарную конъюнкцию всех переменных так, чтобы в конъюнкции переменная была с отрицанием, если в наборе она равна 0.

3. Соединить полученные элементарные конъюнкции знаком дизъюнкции.

$$F(x, y, z) = \overline{xyz} \vee \overline{xyz}.$$

Первая элементарная конъюнкция всех переменных соответствует единичному набору значений аргументов 000, вторая – 001.

Далее воспользуемся правилом получения совершенной конъюнктивной нормальной формы (СКНФ) из вектор-столбца:

1. Выбрать все нулевые наборы значений аргументов.

2. Каждому нулевому набору поставить в соответствие элементарную дизъюнкцию всех переменных так, чтобы в дизъюнкции переменная была с отрицанием, если в наборе она равна 1.

3. Соединить полученные элементарные дизъюнкции знаком конъюнкции.

$$F(x, y, z) = (x \vee \bar{y} \vee z) \cdot (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \cdot (\bar{x} \vee y \vee z) \cdot (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \cdot \\ \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

Здесь элементарные дизъюнкции всех аргументов соответствуют нулевым наборам значений аргументов 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Пример 2. Привести функцию, заданную булевой формулой, к полиному Жегалкина.

Проверить, обладает ли она свойством линейности.

$$f(x, y, z) = \overline{(xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y})} \cdot \overline{(\bar{x} \vee xy)} \vee \bar{z}.$$

Решение.

Алгеброй Жегалкина называется алгебра вида $AG = (P_2, \&, \oplus)$. В алгебре Жегалкина действуют тождества:

1) коммутативность сложения по модулю 2

$$x \oplus y = y \oplus x;$$

2) ассоциативность сложения по модулю 2

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z);$$

3) дистрибутивность конъюнкции по отношению к сложению по модулю 2
 $(x \oplus y) \cdot z = xz \oplus yz,$

$$4) x \oplus x = 0, x \oplus 0 = x$$

а также все тождества, истинные для конъюнкций.

От любой булевой формулы можно перейти к **формуле алгебры Жегалкина**, используя тождества:

$$x \vee y = xy \oplus x \oplus y,$$

$$\bar{x} = x \oplus 1.$$

Полином Жегалкина – это формула алгебры Жегалкина, имеющая вид суммы по модулю 2 элементарных конъюнкций различного количества переменных без отрицаний.

Линейной функцией называется функция, полином Жегалкина которой имеет вид:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \dots \oplus \alpha_n x_n \oplus \beta, \text{ где } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta \in \{0,1\}.$$

Для данной задачи

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \overline{(xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y})} \cdot \overline{((\bar{x} \vee xy) \vee \bar{z})} = (\bar{xy}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}) \cdot ((\bar{x} \vee xy) \vee \bar{z}) \oplus 1 = \\ &= ((\bar{xy}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}) \oplus 1) \cdot ((\bar{x} \vee xy) \oplus 1) \vee \bar{z} \oplus 1 = (\bar{xy}\bar{z} \cdot \bar{x}\bar{y} \oplus \bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{x}\bar{y} \oplus 1) \cdot \\ &\cdot ((\bar{x} \cdot xy \oplus \bar{x} \oplus xy \oplus 1) \vee \bar{z}) \oplus 1 = (\bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{x}\bar{y} \oplus 1) \cdot ((\bar{x} \oplus xy \oplus 1) \vee \bar{z}) \oplus 1 = \\ &= (\bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{x}\bar{y} \oplus 1) \cdot ((\bar{x} \oplus xy \oplus 1) \cdot \bar{z} \oplus (\bar{x} \oplus xy \oplus 1) \oplus \bar{z}) \oplus 1 = \\ &= (\bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{x}\bar{y} \oplus 1) \cdot (\bar{x}\bar{z} \oplus \bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{x} \oplus xy \oplus 1 \oplus \bar{z}) \oplus 1 = \\ &= (\bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{x}\bar{y} \oplus 1) \cdot (\bar{x}\bar{z} \oplus \bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{x} \oplus xy \oplus 1) \oplus 1 = \bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{xy}\bar{z} \oplus \\ &\oplus \bar{x}\bar{y} \oplus \bar{x}\bar{y} \oplus \bar{x}\bar{z} \oplus \bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{x} \oplus xy \oplus 1 \oplus 1 = \bar{xy}\bar{z} \oplus \bar{x}\bar{z} \oplus \bar{x} \oplus xy = \\ &= (x \oplus 1) \cdot (y \oplus 1) \cdot (z \oplus 1) \oplus (x \oplus 1) \cdot (y \oplus 1) \oplus (x \oplus 1) \oplus xy = xyz \oplus xy \oplus xz \oplus \\ &\oplus yz \oplus x \oplus y \oplus z \oplus 1 \oplus xz \oplus x \oplus z \oplus 1 \oplus x \oplus 1 \oplus xy = xyz \oplus yz \oplus x \oplus y \oplus 1. \end{aligned}$$

Функция нелинейная, так как есть конъюнкции различных переменных.

Пример 3. Получить сокращенную ДНФ функции методом Блейка-Порецкого. Из сокращенной ДНФ получить тупиковую ДНФ с помощью таблицы покрытия.

$$f(x, y, z) = \overline{xy\bar{z}} \vee \overline{xy\bar{z}} \vee \overline{x\bar{y}\bar{z}} \vee \overline{xy\bar{z}} \vee \overline{xyz}.$$

Решение.

Метод Блейка-Порецкого – метод получения сокращенной ДНФ, содержащей все простые импликанты.

Пусть дана СДНФ функции.

1. Перенумеруем элементарные конъюнкции.
2. Осуществим попарно склеивание каждой конъюнкции с каждой, если это возможно. Под полученными конъюнкциями будем фиксировать номера.
3. Допишем к списку полученных конъюнкций те, которые не участвовали в склеивании (их номера не фиксировались). Произведем поглощение.
4. Вернемся к п. 1.

В результате получим сокращенную ДНФ, содержащую все простые импликанты.

Получим с помощью метода Блейка-Порецкого сокращенную ДНФ, содержащую все простые импликанты.

$$\text{П. 1. } f(x, y, z) = \overline{xy\bar{z}} \vee \overline{xy\bar{z}} \vee \overline{x\bar{y}\bar{z}} \vee \overline{xy\bar{z}} \vee \overline{xyz};$$

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

$$\text{П. 2, 3. } f(x, y, z) = \overline{\bar{x}\bar{y}} \vee \overline{\bar{y}\bar{z}} \vee \overline{x\bar{z}} \vee \overline{xy};$$

1, 2	1, 3	3, 4	4, 5
------	------	------	------

$$\text{П.4. } f(x, y, z) = \overline{\bar{x}\bar{y}} \vee \overline{\bar{y}\bar{z}} \vee \overline{x\bar{z}} \vee \overline{xy}.$$

1	2	3	4
---	---	---	---

Так как больше склеивания произвести нельзя, сокращенная ДНФ имеет вид:

$$f(x, y, z) = \overline{\bar{x}\bar{y}} \vee \overline{\bar{y}\bar{z}} \vee \overline{x\bar{z}} \vee \overline{xy}.$$

Отношение покрытия между единичными наборами и импликантами ДНФ наглядно задается **таблицей покрытия**.

Строки таблицы соответствуют конъюнкциям ДНФ, столбцы – элементам единичного множества. На пересечении строки и столбца ставится пометка, если данная конъюнкция обращается в единицу данным набором значений аргументов (иначе говоря, данный **набор покрывает единичным множеством конъюнкцию**).

Построим таблицу покрытия:

	000	001	100	110	111
\bar{xy}	•	•			
\bar{yz}	•		•		

$x\bar{z}$			•	•	
xy				•	•

Из таблицы видно, что первую строку удалять нельзя, так как при этом останется не покрыт набор 001. Вторую строку можно удалить, так как наборы, составляющие единичное множество конъюнкции \bar{yz} , содержатся также в единичных множествах других конъюнкций. Аналогично с третьей строкой. Последнюю строку также нельзя удалить, так как если это сделать, останется не покрыт набор 111.

Таким образом, данная функция имеет 2 тупиковые ДНФ:

$$F_1(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{z} \vee xy;$$

$$F_2(x, y, z) = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee xy.$$

Пример 4. Построить для следующего распределения вероятностей код Хаффмена. Найти стоимость кода.

A	B	C	D
0,5	0,2	0,2	0,1

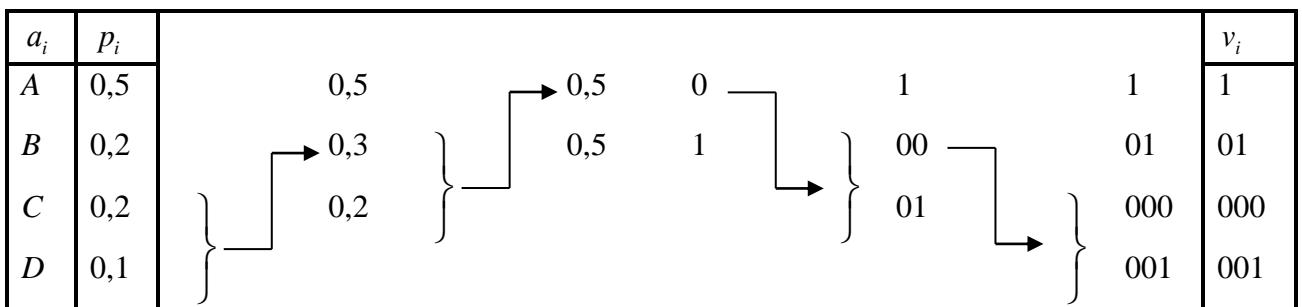
Решение.

Теорема Хаффмена. Если $V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ – оптимальный двоичный код при распределении $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ и некоторая вероятность $p_j = q_1 + q_2$, причем

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{j-1} \geq p_j \geq p_{j+1} \geq \dots \geq p_m \geq q_1 \geq q_2,$$

то код $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_m, v_j 0, v_j 1\}$ также является оптимальным при распределении $P' = \{p_1, p_2, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_m, q_1, q_2\}$.

Построение оптимального кода Хаффмена заключаются в следующем. Пусть в упорядоченном по невозрастанию вероятностей списке две последние вероятности – p_{m-1} и p_m . Эти вероятности из списка исключаются, а их сумма вставляется в список таким образом, чтобы вероятности по-прежнему не возрастили. Делаем так, пока в списке не останется две вероятности. Первой из них присваивается символ 0, второй – символ 1. Получаем оптимальный код, состоящий из 2 кодовых слов. Далее, используя теорему Хаффмена, расширяем его до кода из 3 слов, и т.д., пока не получим список исходных вероятностей.



Найдем стоимость полученного кода:

$$L_V(P) = \sum_{i=1}^4 \lambda(v_i) \cdot p_i = 0,5 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot (0,2 + 0,1) = 1,8.$$

Пример 5. Построить для следующего распределения вероятностей код Фано. Найти стоимость кода.

A	B	C	D	E	F	G	H
0,3	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0

Решение. Упорядоченный по невозрастанию частот список букв делим на две последовательные части, так чтобы разность между суммой частот первой и второй частей была бы как можно меньше по абсолютному значению. Первой части присваиваем символ 0, второй – символ 1. С каждой новой частью делаем то же самое. И так далее, пока в каждой части не останется по одной букве.

	p_i									v_i
	$0,30 \}$	$0,48$	$0,30$						0	00
	$0,18 \}$		$0,18$						1	01
	$0,14 \}$			$0,14$					0	100
	$0,14 \}$			$0,14$					1	101
	$0,11 \}$				$0,11$				0	110
	$0,06 \}$					$0,06$			1	1110
	$0,05 \}$						$0,05$		1	11110
	$0,02 \}$						$0,02$		1	11111

Обозначим за $\lambda(v_i)$ длину кодового слова v_i . Найдем стоимость полученного кода:

$$L_V(P) = \sum_{i=1}^8 \lambda(v_i) \cdot p_i = 2 \cdot (0,3 + 0,18) + 3 \cdot (0,14 + 0,14 + 0,11) + 4 \cdot 0,06 + 5 \cdot (0,05 + 0,02) = 2 \cdot 0,48 + 3 \cdot 0,39 + 4 \cdot 0,06 + 5 \cdot 0,07 = 2,75.$$

3.2.7. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Пример 1.

$$\text{Найти } f(x) = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 = 1. \quad (2)$$

Решение. Приведем ограничения задачи к виду общей формы задачи НЛП:

$$g(x) = 1 - x_1 - x_2 = 0.$$

Поскольку градиент ограничения $\nabla g = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ линейно независим в произвольной точке,

то в точке минимума, если она существует, будет выполнено условие регулярности. Следовательно, мы можем использовать функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(x, y) = f(x) + (y, g(x)) = x_1^2 + x_2^2 + y(1 - x_1 - x_2).$$

Для поиска подозрительных на минимум точек используем необходимые условия

$$\nabla_x L(x^*, y^*) = 0, \quad y_i \geq 0, i \in I^*, \quad (y^*, g(x^*)) = 0, \quad (3)$$

В результате получим:

$$\nabla_x L(x, y) = \begin{pmatrix} 2x_1 - y \\ 2x_2 - y \end{pmatrix} = 0.$$

Решая систему уравнений и исключая y , получим взаимосвязь переменных

$$x_1 = x_2.$$

На основе условия допустимости, т.е. выполнимости ограничения (2), с учетом взаимосвязи $x_1 = x_2$, получим:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } x^* = (1/2, 1/2).$$

Матрица вторых производных функции Лагранжа имеет вид

$$\nabla_{xx}^2 L(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица вторых производных строго положительно определена, то для произвольного s будет выполняться неравенство $(\nabla_{xx}^2 L(x^*, y^*)s, s) > 0$. Отсюда, используя теорему о достаточных условиях оптимальности в общей задаче НЛП, определим, что точка

$$x^* = (1/2, 1/2)$$

является точкой минимума, причем $f(1/2, 1/2) = 1/4 + 1/4 = 1/2$.

Ответ. Минимум равен $1/2$.

3.2.8. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Задача. Найти значение функции $f(x)$ в заданной точке x так, чтобы погрешность при интерполяции значений функции многочленом Гаусса второй степени не превышала заданного ε .

Алгоритм

1. Задаем отрезок $[a, b]$.
2. Находим $\max_{[a,b]} |f^{(3)}(x)|$.
3. Определяем шаг из условия

$$h^3 \leq \frac{16\varepsilon}{\max_{[a,b]} |f^{(3)}(x)|}.$$

4. Задаем узлы $x_i = a + i h$, ($i = 0, \dots, n$).
5. Найдем ближайший к точке x (точке интерполяции) узел x_q .
6. Строим полином Гаусса по точкам x_{q-1}, x_q, x_{q+1} :

$$P(x) = f_q + (f_{q+1} - f_q) \cdot t + (f_{q+1} - 2f_q + f_{q-1}) \frac{t(t-1)}{2!}$$

где

$$t = \frac{x - x_q}{h},$$

$$f_q = f(x_q),$$

7. Определяем $P_3(x) \approx f(x)$.

Пример. По заданным значениям функции $y(x) = \cos(x)$ вычислить приближенное значение функции в точке $x = 1,25$ с точностью $\varepsilon = 0,001$ с помощью многочлена Гаусса $P_3(x)$.

Решение. Задаем отрезок $[1, 1,4]$.

Найдем $\max_{[1,1,4]} |f^{(3)}(x)| = |\sin(1,4)| \approx 0,9854$

Определим шаг h из условия

$$h^3 \leq \frac{16\varepsilon}{\max_{[a,b]} |f^{(3)}(\xi)|} = \frac{16 \cdot 0,001}{0,9854} \approx 0,01623.$$

$$h \leq \sqrt[3]{0,01623} \approx 0,253. \text{ Выберем шаг } h \text{ равным } 0,2.$$

Найден шаг сетки h , чтобы квадратичная интерполяция полиномом Гаусса в точке имела погрешность не больше ε .

Вычисление значения полинома.

Зададим узлы $x_i = 1+0,2i$, ($i = 0,1,2$) и получим таблицу

x	1	1,2	1,4
$y(x)$	0,540302	0,362357	0,16996714

Очевидно, что ближайшим к точке интерполяирования $x=1,25$ является узел $x_q = 1,2$ при $q = 1$.

Полином Гаусса по точкам $x_{q-1} = x_0 = 1$, $x_q = x_1 = 1,2$, $x_{q+1} = x_2 = 1,4$ имеет вид

$$P(x) = f_q + (f_{q+1} - f_q) \cdot t + (f_{q+1} - 2f_q + f_{q-1}) \frac{t(t-1)}{2!}$$

где

$$t = \frac{x - x_1}{h} = \frac{1,25 - 1,2}{0,2} = 0,25,$$

$$f_1 = f(x_q),$$

$$f_2 - f_1 = 0,16996714 - 0,362357 = -0,1923906,$$

$$f_2 - 2f_1 + f_0 = 0,16996714 - 2 \cdot 0,362357 + 0,540302 = -0,01444606.$$

Вычислим полином Гаусса:

$$P_3(x) = 0,362357 - 0,1923906 \cdot 0,25 - 0,014444606 \frac{0,25(0,25-1)}{2!} \approx 0,315614423.$$

Для сравнения, значение заданной функции в точке интерполяирования с 9 верными знаками:

$$y(1,25) = \cos(1,25) \approx 0,315322362.$$

Разность между ним и найденным приближенным значением функции равна $|0,315322362 - 0,315614423| \approx 0,0003$.

Программа.

```

Function f(x)
    f = Cos(x)
End Function
Function f3(x)
    f3 = Sin(x)
End Function
Private Sub CommandButton2_Click()
    a = 1
    b = 1.4
    xint = 1.25
    eps = 0.001
    Max = 0
    For t = a To b Step 0.1
        If Abs(f3(t)) > Max Then Max = Abs(f3(t))
    Next t
    h = (16 * eps) / Max
    h = h ^ (1 / 3)
    MsgBox h
    n = CInt((b - a) / h)
    MsgBox n
    h = (b - a) / n
    MsgBox h
    ReDim x(n), y(n)
    For i = 0 To n

```

```

x(i) = a + i * h
Next i
s = Abs(b - a)
For i = 0 To n
If Abs(xint - x(i)) < s Then
s = Abs(xint - x(i))
q = i
End If
Next i
t = (xint - x(q)) / h
p1 = f(x(q + 1)) - f(x(q))
p2 = f(x(q + 1)) - 2 * f(x(q)) + f(x(q - 1))

p = f(x(q)) + p1 * t + p2 * t * (t - 1) / 2
toch = f(xint)
Cells(1, 1) = "По Гауссу приближенное значение функции = " + CStr(p)
Cells(2, 1) = "Точное значение функции = " + CStr(toch)
End Sub
Ответ. По Гауссу приближенное значение функции = 0,315614419724906.
Точное значение функции = 0,315322362395269.

```

3.2.9. БАЗЫ ДАННЫХ

Пример 1. Напишите процедуру для вывода на фамилии и названия отдела для служащих, чья заработка лежит в диапазоне плюс-минус 100 от введенного значения.

- Напишите обработчик исключений, который будет выдавать сообщение о том, что служащих с такой зарплатой нет.
- Напишите обработчик исключений, который будет выдавать сообщение о том, что служащих с такой зарплатой несколько. Сообщение должно указывать, сколько сотрудников попадает в этот диапазон зарплат.

Решение.

```

CREATE OR REPLACE PROCEDURE EXAMPLE(in_salary IN NUMBER)
AS
v_count_n NUMBER(10);
exempt_notExist_emp EXCEPTION;
exempt_some_emp EXCEPTION;
CURSOR CUR_SAL(sal NUMBER) IS
    SELECT e.last_name, d.name
    FROM s_emp e, s_dept d
    WHERE e.dept_id=d.id
        AND e.salary BETWEEN sal-100 AND sal+100;
BEGIN
FOR cur IN CUR_SAL(in_salary) LOOP
    dbms_output.PUT_LINE(cur.last_name||' '||cur.name);
END LOOP;
SELECT COUNT(e.id)
INTO v_count_n
FROM s_emp e, s_dept d
WHERE e.dept_id=d.id AND e.salary BETWEEN in_salary-100 AND in_salary+100;
IF v_count_n=0 THEN
    RAISE exempt_notExist_emp; --нет служащих
ELSE
    RAISE exempt_some_emp; --есть служащие

```

```

END IF;
EXCEPTION
WHEN excep_notExist_emp THEN
    dbms_output.PUT_LINE('Служащих с такой зарплатой нет!');
WHEN excep_some_emp THEN
    dbms_output.PUT_LINE('Служащих с такой зарплатой: '|v_count_n);
WHEN OTHERS THEN
    dbms_output.put_line('Ошибка..');
END.

```

3.2.10. ЯЗЫКИ И МЕТОДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Пример 1. Одномерные массивы: вставить после максимального элемента значение 100. Если максимальных элементов несколько, добавить элемент после каждого из них. Вставку элемента оформить как функцию.

Решение.

```

void ins(int a[], int n, int k)
{
    for(int i=n;i>k+1;i--) a[i]=a[i-1];
    a[k+1]=100;
}

int main()
{
    int a[100];
    int n,i,max;
    printf("n="); scanf("%d",&n);
    scanf("%d", &a[1]);max=a[1];
    for(i=2;i<n;i++)
        { scanf("%d", &a[i]); if (a[i]>max) max:=a[i];}
    for(i=1;i<n;i++) if (a[i]==max) {ins(a,n,i); i++;}
}

```

Пример 2. Строки: в заданной строке заменить все прописные буквы строчными. Алгоритм замены оформить в виде функции.

Решение.

```

void f(char *c)
{
    for(int i=0;i<strlen(c);i++) if (islower(c[i])) c[i]=toupper(c[i]);
}

int main()
{ char *c=new char[1];
    scanf("%s", c);
    f(c);
    return 0;
}

```

Пример 3. Классы: создать класс «Комплексные числа». Определить операции вычисления модуля комплексного числа и суммы двух комплексных чисел.

Решение.

```

class complex
{ float re,im;

```

```

public:
complex (float a=0, float b=0) {re=a; im=b;};
complex operator + (complex &c)
{ complex z;
z.re=re+c.re;
z.im=im+c.im;
return z;
}
float mod() (return sqrt(re*re+im*im));
}

```

4. Перечень рекомендуемой литературы для подготовки к экзамену

4.1. МАТЕМАТИКА

4.1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Основная

- [1] Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 624 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/92629>.

4.1.2. АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Основная

- [1] Мальцев, А.И. Основы линейной алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 480 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/251>.
- [2] Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 512 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/493>.
- [3] Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 432 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/30198>.
- [4] Постников, М.М. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 416 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/318>.

Дополнительная

- [5] Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 480 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/529>.

4.1.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основная

- [1] Демидович, Б.П. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 288 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/126>.
- [2] Кучер, Н. А. Дифференциальные уравнения: Электронный учебно-методический комплекс [Электронный ресурс] / Н. А., Кучер, О. В. Малышенко, Д. А. Прокудин. — Кемерово: Кемеровский государственный университет, 2010. — Регистрационное свидетельство №18662 от 13 апреля 2010 г. Номер государственной регистрации 0321000299. Точка доступа: <http://edu.kemsu.ru/res/file.ht>

4.1.4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Основная

- [1] Теория вероятностей и математическая статистика. Вопросы для самоконтроля: учеб.-

метод. пособие / Кемеровский гос. ун-т ; [сост. В. А. Толстунов] – Томск : Изд-во Томского гос. пед. ун-та , 2008 – 39 с.

- [2] Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.-метод. пособие / Кемеровский гос. ун-т, Кафедра автоматизации исследований и технической кибернетики; [сост. С. Г. Гутова]. – Кемерово: Кемеровский госуниверситет, 2008. – 107 с.: табл.

Дополнительная

- [3] Зубков, А.М. Сборник задач по теории вероятностей [Электронный ресурс] : учеб. пособие / А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 320 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/154>.

4.1.5. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Основная

- [1] Кузнецов, О.П. Дискретная математика для инженера [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 400 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/220>.

Дополнительная

- [4] Дискретная математика: учеб.-метод. пособие / Кемеровский государственный университет; сост. С. Г. Гутова, Т. А. Невзорова. – Кемерово, 2011. – 128 с.

4.1.6. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Основная

- [1] Бахвалов, Н.С. Численные методы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — Электрон. дан. — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2015. — 639 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/70767>.

- [2] Ашманов, С.А. Теория оптимизации в задачах и упражнениях [Электронный ресурс] : учеб. пособие / С.А. Ашманов, А.В. Тимохов. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2012. — 448 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/3799>

- [3] Лесин, В.В. Основы методов оптимизации [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2016. — 344 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/86017>.

- [4] Крутиков, В. Н. Методы оптимизации: учеб. пособие / В. Н. Крутиков; Кемеровский гос. ун-т. – Кемерово, 2011. – 91 с.

Дополнительная

- [5] Кузнецов, А.В. Высшая математика. Математическое программирование [Электронный ресурс] : учеб. / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2013. — 352 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/4550>.

4.2. ИНФОРМАТИКА

4.2.1. ЯЗЫКИ И МЕТОДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Основная

1. Гудов, А. М. Базы данных и системы управления базами данных. Программирование на языке PL/SQL : учеб. пособие / А. М. Гудов, С. Ю. Завозкин, Т. С. Рейн ; Кемеровский гос. ун-т. - Кемерово : ИНТ, 2010. - 133 с.

2. Гудов, А. М. Базы данных и системы управления базами данных. Программирование на языке PL/SQL [Электронный ресурс] : электронное учеб. пособие / А. М. Гудов, С. Ю. Завозкин, Т. С. Рейн ; Кемеровский гос. ун-т, Кафедра ЮНЕСКО по новым информационным технологиям. - Электрон. дан. - Кемерово : КемГУ, 2009. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM)

3. Гудов, А. М. Программирование на языке PL/SQL [Электронный ресурс] : электронный лабораторный практикум / А. М. Гудов, С. Ю. Завозкин, Т. С. Рейн ; Кемеровский гос. ун-т, Кафедра ЮНЕСКО по новым информационным технологиям. - Электрон. дан. - Кемерово : КемГУ, 2009. - 1 эл. опт. диск (CD-ROM)

Дополнительная

4. Вирт, Н. Алгоритмы и структуры данных. Новая версия для Оберона [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Москва : ДМК Пресс, 2010. — 272 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/1261>.

4.2.2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Основная

- [1] Бахвалов, Н.С. Численные методы [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. — Электрон. дан. — Москва : Издательство "Лаборатория знаний", 2015. — 639 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/70767>.

- [2] Численные методы: уч. пособие / О. Н. Гавришина, Ю. Н. Захаров, Л. Н. Фомина; Кемеровский государственный университет. - Кемерово, 2011. – 238 с.

- [3] Волков, Е.А. Численные методы [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2008. — 256 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/54>.

Дополнительная

- [4] Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 608 с. — Режим доступа: <https://e.lanbook.com/book/255>.

5. Критерии оценки результатов сдачи экзамена

Работы по математике и по информатике проверяются комиссией, состоящей не менее чем из трех экзаменаторов.

Каждая задача оценивается по балльной шкале: «0», «1», «2», «3». Общая оценка по каждой работе выставляется комиссией по сумме баллов.

Критерии оценки за задачу:

- «0» – задача не решена;
- «1» – задача решена частично, ответ не верен, но идея решения верна;
- «2» – задача решена, но по ходу решения допущены вычислительные ошибки; ответ может быть не верен.
- «3» – задача решена полностью, ответ верен, могут быть несущественные замечания к ходу решения.

Общая оценка по экзамену выставляется всеми членами комиссии. Критерии общей оценки по сумме баллов:

- «0»-«6» – оценка «неудовлетворительно»;
- «7»-«10» – оценка «удовлетворительно»;
- «11»-«12» – оценка «хорошо»;
- «13»-«15» – оценка «отлично».